MECHANICS 2 (2017/18 spring)	HW 3

Small test problems

HW3/1

In a simplified relativistic model of nucleus-nucleus collisions, a nucleus of (resting) mass m_1 having (usual) velocity v_1 collides with an other nucleus of (resting) mass m_2 that rests initially. After the collision a highly excited composite particle is produced that has velocity v_0 and „resting" mass m_0. *(Note: the word „resting" is marked, because for such a highly excited particle the word „rest" is not very accurate.)*

a.) Write down the 4-momenta of the nuclei before the collision.

b.) Write down the 4-momentum conservation for the collision, and express the 4-momentum of the composite after the collision.

c.) The Minkowski-length of the 4-momentum vector is Lorentz invariant. Use this fact, and express the „resting" mass m_0 of the composite particle.

d.) Determine the velocity v_0 of the composite! Calculate its numerical value, if , $m_1 = 40u_a$, $m_2 = 238u_a$, and $v_1 = 0{,}8c$, with u_0 denoting the atomic mass unit.

HF3/2

Let's consider the propagation of two photons. One has 4-momentum $q_1^\mu = (q, q, 0, 0)$, while the other has $q_2^\mu = (2q, -q, \sqrt{3}q, 0)$.

a.) Determine the Minkowski length squares of the 4-momenta to show, that they can be the 4-momenta of (massless) photons.

b.) Express the total momentum of the two photons. Which kind of 4-vector is that (space-like/time-like/light-like)?

c.) Find a frame of reference (moving in direction *y*) where the total (3-) momentum vanishes. (We can call this the „center of mass" frame of the two photons.)

d.) Express the 4-momenta $q_1'^\mu$ and $q_2'^\mu$ of the photons in this „center of mass" frame. What is the energy of the photons? What can you say about the direction of their propagation?

Problems for practice

Pr3/1

A spacecraft has departed from Earth, and now travels with constant 3-velocity $\vec{v} = (c/2, c/2, 0)$.

a.) Determine the 4-velocity vector of the spacecraft.

A physics student – as homework – must find a Lorentz-transformation, that transforms to the frame of reference of the spacecraft. Because of some internet-connection issues he cannot search the result on Wikipedia, and he only remembers the specific Lorentz matrices that are boosts in the directions of some of the three axes. He don't give up, and figures out the following solution:

- First he performs a boost in the *x*-direction. He chooses the velocity of the boost in such a way, that the spacecraft will move precisely in the *y'*-direction. He denotes the velocity of the boost by V_1.
- As a second step, he performs a boost in the *y'* direction such, that in the final frame the spacecraft is in rest.

b.) Determine the velocity V_1 of the first boost.

c.) Determine the 4-velocity of the spacecraft in this „auxiliary" frame of reference. What is the (usual) velocity V_2 of the spacecraft in this frame?

d.) Using the results of b.) and c.), using matrix multiplication, express the total Lorentz transformation that transforms from the frame of Earth to the frame of the spacecraft.

The student finds the result of d.) very strange (It is not a symmetric matrix). As a cross-check he calculates the transformation matrix in a different way: first he performs a boost in the *y*-direction with velocity V_1 , and then in the *x'*-direction with velocity V_2.

e.) What is the resulting matrix now?

Finally the student remembers that the usual 3-rotations of the coordinate system are also Lorentz-transformations. Therefore first he performs a rotation in the original frame, to rotate the velocity vector of the spacecraft in the *x*-direction. Then he performs an appropriate boost, and finally he rotates back the coordinate system (using the same angle as in the fist rotation).

f.) What is the resulting matrix in this case?

KisZh-n szerepelhető feladatok

HF3/1

Az atommag-atommag ütközések egyszerűsített relativisztikus modelljében, egy m_1 nyugalmi tömegű és v_1 (szokásos) sebességű atommag ütközik egy m_2 nyugalmi tömegű, kezdetben álló atommagnak. Az ütközés után egy magasan gerjesztett kompozit jön létre, melynek sebességét jelöljük v_0 -lal, és a „nyugalmi" tömegét m_0 -lal.

(Megj.: Az idézőjellel azt érzékeltettük, hogy ez a kompozit vélhetően magasan gerjesztett állapotban van, ezért a nyugalmi tömeg elnevezés nem a legkorrektebb.)

e.) Írja fel a két mag ütközés előtti négyes impulzusait.

f.) Írja fel a (négyes) impulzusmegmaradás törvényét az ütközésre, és ez alapján fejezze ki a kompozit négyes impulzusát az ütközés után!

g.) Ismeretes, hogy a négyesimpulzus Minkowski-hossza Lorentz-invariáns. Ezt felhasználva fejezze ki a kompozit m_0 „nyugalmi" tömegét!

h.) Határozza meg a kompozit v_0 sebességét! Fejezze ki ennek numerikus értékét, ha $m_1 = 40u_a$, $m_2 = 238u_a$, és $v_1 = 0{,}8c$, ahol u_a az atomi tömegegységet jelöli.

HF3/2

Két foton terjedését vizsgáljuk. Egyikük négyesimpulzus vektora $q_1^\mu = (q, q, 0, 0)$, a másiké $q_2^\mu = (2q, -q, \sqrt{3}q, 0)$.

e.) A megadott négyesimpulzusok Minkowski-hossznégyzetének kiszámításával mutassa meg, ezek valóban lehetnek fotonok négyesimpulzusai!

f.) Adja meg a két foton négyesimpulzusainak összegét! Milyen négyesvektor ez (térszerű/időszerű/fényszerű)?
(Megj: térszerű egy négyesvektor, aminek a Minkowski hossznégyzete negatív, időszerű aminek pozitív, fényszerű aminek nulla.)

g.) Keressen olyan, (y irányba mozgó) inerciarendszert, melyben a két foton össz (hármas-) impulzusa éppen zérus. *(Ezt joggal nevezhetjük a kétfotonos rendszer tömegközépponti rendszerének.)*

h.) A c.) feladatban kapott inerciarendszerbe vivő transzformáció alkalmazásával adja meg az egyes fotonok $q_1'^\mu$ és $q_2'^\mu$ négyesimpulzusait a „tömegközépponti" rendszerben. Mekkora az egyes fotonok energiája, és mit mondhatunk mozgásuk irányáról?

Gyakorlófeladatok

Gy3/1

Egy űrhajó távolodik a Földtől, bizonyos okokból a leíráshoz nem a legkényelmesebb koordinátarendszert választottuk, az űrhajó (hármas) sebességvektora: $\vec{v} = (c/2, c/2, 0)$.

g.) Adja meg az űrhajó négyes-sebesség vektorát!

Egy fizikushallgató azt kapta házi feladatként, hogy adjon meg egy olyan Lorentz-transzformációt, ami áttranszformál a Föld rendszeréből az űrhajóval együttmozgó rendszerbe. Mivel megszakadt az internet hozzáférése, és csupán arra a speciális esetre emlékszik, amikor a mozgó rendszer sebessége valamelyik koordinátatengely irányába mutat, ezért a következő megoldást eszeli ki:

- Először áttranszformál egy olyan rendszerbe, ami a Földhöz képest a $+x$ irányba mozog éppen olyan sebességgel, hogy az új rendszerben az űrhajó már csak az (új rendszer-beli) y

irányba mozog. Az új vonatkoztatási rendszer Földhöz képest mért sebességét jelöljük V_1-el.

- Ezután végrehajt egy $+y$ irányú boostot V_2 sebességgel, és így abba a rendszerbe jutott, ahol az űrhajó áll.

h.) Adja meg, mekkora az első boost $+x$ irányú V_1 sebessége!

i.) Adja meg az űrhajó négyes-sebességét ebben a „köztes” rendszerben! Mekkora az űrhajó szokásos V_2 sebessége ebben a rendszerben?

j.) A c.) feladat alapján adja meg azt a (teljes) Lorentz-transzformációt, ami a Földhöz rögzített rendszerből az űrhajó rendszerébe transzformál!

A hallgató nézi az eredményt, de nagyon furcsának tartja. Próbaként kiszámítja, mit kapott volna, ha először az $+y$ irányba boostol V_1 sebességgel, majd utána az $+x$ irányba V_2-vel.

k.) Mit kapott eredményül? Miért tér el a d.) feladatban kapottól?

A hallgató ezután visszaemlékezik az előadásra, ahol szó volt arról, hogy a szokásos háromdimenziós forgatások is a Lorentz-transzformációk csoportjának részei. Ezért először egy egyszerű forgatást hajt végre, ezzel az űrhajó sebességvektorát a $+x$ irányba forgatja, most könnyen végre tudja hajtani a boostot a $+x$ irányba. Végül, mivel nem szeretné „elforgatni” a koordinátatengelyeket, ezért az első forgatás inverzét is végrehajtja.

Mit kapott ebben az esetben?
