MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	A) HF 8

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF8/1

Egy egy szabadsági fokú mechanikai rendszer kanonikus koordinátája és impulzusa q és p. Szeretnénk végrehajtani egy kanonikus transzformációt, amit az alábbi alakban keresünk:

$$Q = \alpha \frac{p}{q}, \quad P = \beta q^2 ,$$

ahol α és β egyenlőre ismeretlen valós konstansok.

a.) Adja meg a transzformációt jellemző M_{ij} Jacobi mátrixot:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

b.) Számítsa ki az $M_{ik} J_{kl} M_{jl}$ mátrixot!

c.) Mit követeljünk meg az α és β konstansoktól, ha azt szeretnénk, hogy a transzformáció kanonikus legyen?

HF8/2

Egy részecske szabadon mozoghat az x tengely mentén, a Hamilton függvénye triviális módon:

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} .$$

Tekintse az alábbi, explicit módon időfüggő fizikai mennyiséget:

$$F(p,x) = x - \frac{t}{m} p .$$

a.) Számítsa ki az *[F,H]* Poisson-zárójelet (vigyázat, ez nem tűnik el!), és mutassa meg, hogy *F* mozgásállandó, azaz $\frac{dF}{dt} = [F,H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

b.) Mint gyakorlaton szerepelt a megmaradó mennyiségek mindig szimmetriákat generálnak. Ahhoz, hogy meghatározzuk, mit generál F, az alábbi egyenleteket kell megvizsgálnunk:

$$\frac{dx}{ds} = [x,F]$$

$$\frac{dp}{ds} = [p,F]$$

Fejezze ki a jobboldalon megjelenő Poisson-zárójeleket.

c.) A b.)-ben kapott egyenletek *s* szerinti integrálásával adja meg az $x(s)$ és $p(s)$ kifejezéseket, ahol az $x(s=0) = x_0$ és $p(s=0) = p_0$ „kezdeti feltételeket” használhatja.

Láthatja, hogy az $x(s)$ és $p(s)$ kifejezések éppen a Galilei-féle transzformációs összefüggéseket adják, amik valóban szimmetriái egy szabad részecske mozgásának.

MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	B) HF 8

Gyakorlófeladatok

Gy8/1

Egy csatolt oszcillátor-pár Hamilton-függvénye az alábbi alakban van megadva:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2\right) + \frac{1}{2} m\Omega^2\left(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2\right)$$

Szeretnénk olyan kanonikus transzformációt végrehajtani, ami áttranszformál a rendszer normálkoordinátáiba.

a.) Keresse az „új” kanonikus impulzusokat az alábbi alakban:

$$P_1 = a(p_1 - p_2)$$

$$P_2 = b(p_1 + p_2)$$

Adja meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a Hamilton függvény kinetikus energiát leíró tagja az alábbi alakú legyen:

$$\frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2\right) = \frac{1}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right)$$

b.) Keresse az „új” kanonikus koordinátákat az alábbi alakban:

$$Q_1 = c(q_1 - q_2)$$

$$Q_2 = d\left(q_1 + q_2\right)$$

Adja meg a c és d paraméterek értékét úgy, hogy a transzformáció kanonikus legyen!

c.) Adja meg a Hamilton-függvényt az új $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ változók függvényében! Ha jól számolt ez (az eredeti Hamilton-függvény szerencsés alakja miatt) máris normálmódusok szerint szeparált alakban van, azaz nincs Q_1Q_2 szorzat tag a Hamilton függvényben. Mekkorák az egyes módusok rezgési frekvenciái?

d.) Mutassa meg, hogy az alábbi mennyiség időállandó!

$$D = Q_1 P_2 - Q_2 P_1$$

Gy8/2

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2\right)$$

$$y = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2\right)$$

$$p_x = \frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2\right)$$

$$p_y = -\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 - P_2\right)$$

Legyen $\eta_i = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad \xi_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}$!

a.) Határozza meg az $M_{ij} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$ mátrixot!

b.) Mutassa meg, hogy a transzformáció kanonikus, azaz invariánsan hagyja a (4×4 méretű J mátrixszal jellemzett) szimplektikus struktúrát!

Gy8/3

Egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}$$

a.) Mutassa meg, hogy az alábbi (explicit módon időfüggő) mennyiség időállandó, azaz értéke a mozgás során állandó!

$$D = \frac{pq}{2} - H(p,q)t$$

b.) Tekintse a probléma egy lehetséges kétdimenziós általánosítását,

$$H = |\mathbf{p}|^n - a|\mathbf{r}|^{-n}.$$

Mutassa meg, hogy az alábbi mennyiség időállandó:

$$D = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{n} - H\,t$$
