

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF7/1

Egy kétdimenziós izotrop harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye az alábbi alakú:

$$L(x, v_x, y, v_y) = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$X(x, y, \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$Y(x, y, \varphi) = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

- a.) Adja meg a sebességek transzformációját!

$$V_X(x, v_x, y, v_y, \varphi) = ?$$

$$V_Y(x, v_x, y, v_y, \varphi) = ?$$

- b.) Mutassa meg, hogy a fenti transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt, azaz szimmetria! (mutassa meg, hogy $L(X, V_X, Y, V_Y) = L(x, v_x, y, v_y)$)
- c.) Írja fel a Noether-tételt a fenti szimmetriatranszformációra! Adja meg a szimmetriához tartozó megmaradó mennyiséget!
- d.) Írja fel a Lagrange-függvényből kiindulva a rendszer mozgásegyenleteit!
- e.) Mutassa meg közvetlenül a mozgásegyenletekből, hogy a c.)-ben nyert mennyiség valóban megmaradó mennyiség!

HF7/2

Egy két szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - A q_1^2 + B q_2^2,$$

ahol A és B valós állandók.

- a.) Adja meg a rendszer Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit!
- b.) Tekintse az alábbi mennyiségeket:

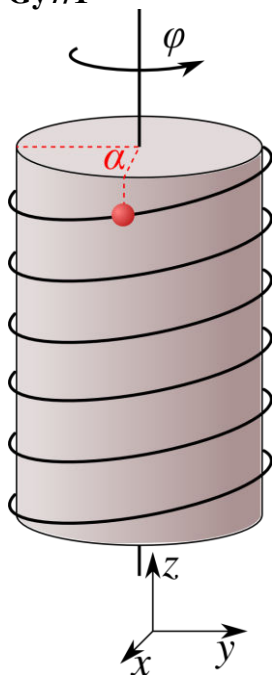
$$F_1(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{p_1 - A q_1}{q_2}, \text{ és } F_2(q_1, p_1, q_2, p_2) = q_1 q_2$$

Számítsa ki az $[F_1, H]$ és $[F_2, H]$ Poisson-zárójeleket! Mutassa meg, hogy mindkét mennyiség mozgásállandó!

- c.) Számítsa ki az $[F_1, F_2]$ Poisson-zárójelet. Legyen $F_3 = [F_1, F_2]$! Mozgásállandó ez?

Gyakorlófeladatok

Gy7/1



Egy kör alapú hengerre egy spirál alakú drótpályát cséveltünk, amin egy m tömegű gyöngyszem súrlódás nélkül mozoghat. A henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére Θ , és a tengely körül könnyen (súrlódás nélkül) elfordulhat. A rendszer helyzetét a henger φ elfordulásával és a gyöngyszem α helyzetével írjuk le. A gyöngyszemre hat a külső gravitációs erőter is.

A gyöngyszem x, y, z koordinátáit a két szöggel az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$$x = R \sin \alpha$$

$$y = -R \cos \alpha,$$

$$z = C(\alpha - \varphi)$$

Ahol C jelöli a spirál menetemelkedését.

a.) Konstruálja meg a rendszer Lagrange-függvényét!

b.) Mutassa meg, hogy az alábbi szimmetriatranszformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt:

$$\alpha' = \alpha + \theta,$$

$$\varphi' = \varphi + \theta$$

- c.) Adja meg a szimmetriához tartozó Noether-féle mozgásállandót! Milyen jól ismert fizikai mennyiséget kapott?
- d.) Írja fel a rendszer mozgásegyenleteit!
- e.) A $t=0$ időpontban az $\alpha = 0$, $\varphi = 0$ pontból indítjuk a rendszert, álló helyzetből. Adja meg a mozgásegyenletek megoldását!
- f.) Adja meg a c.)-ben kapott mozgásállandó értékét az e.) feladat adatai esetén, és mutassa meg, hogy valóban állandó az időben!

Gy7/2

Egy kétdimenziós izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Tekintse az alábbi mátrixot! ($i, j \in \{x, y\}$)

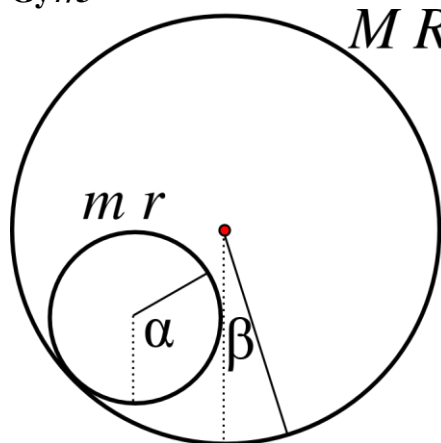
$$A_{ij} = \frac{1}{2m} (p_i p_j + m^2 \omega^2 r_i r_j),$$

ahol az $r_x = x$ és $r_y = y$ jelölést használtuk. Ez láthatóan egy 2×2 -es szimmetrikus mátrix, benne ezért három független mátrixelem található.

- a.) Számítsa ki az $[A_{xx}, H]$ és $[A_{yy}, H]$ Poisson-zárójeleket, és ezzel bizonyítsa be, hogy a mátrix diagonális elemei megmaradó mennyiségek. Mit írnak le?
- b.) Számítsa ki az $[A_{xy}, H]$ Poisson zárójelet, és bizonyítsa be, hogy ez is megmaradó mennyiség!
- c.) Írja fel a rendszer Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit!
- d.) A megoldást keresse az alábbi alakban:
- $$x(t) = B \sin(\omega t + \theta_1),$$
- $$y(t) = C \sin(\omega t + \theta_2)$$
- e.) Fejezze ki a B és C konstansokat az A_{xx} és A_{yy} segítségével!

f.) Fejezze ki a $\theta_1 - \theta_2$ különbséget A_{xx} , A_{yy} és A_{xy} segítségével!

Gy7/3



$M R$ Tekintse a 8. gyakorlat 2. Feladatát!

- A Lagrange-függvény Legendre-transzformációjával Határozza meg a Hamilton-függvényt!
 - Fejezze ki a gyakorlaton levezetett Noether-féle megmaradó mennyiséget (jelöljük A-val!) a kanonikus impulzusok és koordináták segítségével!
 - Számítsa ki az $[A,H]$ Poisson zárójelét, és ezzel bizonyítsa ismét, hogy A egy megmaradó mennyiség!
-