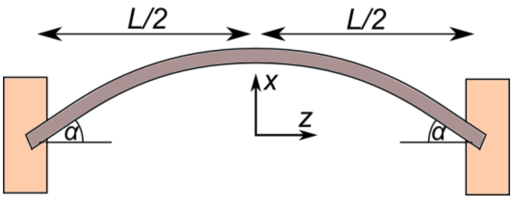
KisZh-án szerepelhető feladatok

HF6/1



Egy könnyű (elhanyagolható tömegű), L hosszúságú rúd két végét befalaztuk az ábrának megfelelő módon: a két furat a vízszintessel kicsiny $\alpha << 1$ szöget zár be. A rúd keresztmetszeti tényezője Θ, Young-modulusa E. A z tengely vízszintes, a rúd alakját a $\chi(z)$ függvénnyel jellemezzük. A rúd két végpontja a $z = \pm\frac{L}{2}$ pontokban van.

a.) Írja fel a rúd alakját meghatározó (negyedrendű) differenciálegyenletet!
b.) Adja meg az egyenlet általános megoldását.
c.) Adja meg a rúd végeinél érvényes peremfeltételeket!
d.) Adja meg a peremfeltételeknek is megfelelő megoldást. Rajzolja fel!
e.) Milyen magasan van a rúd $z=0$ középpontja?
f.) Adja meg a rúdban ébredő $M(z)$ hajlítónyomatékot!

HF6/2

Ebben a feladatban a célunk megmutatni, hogy az elektrosztatika alapegyenlete, a Poisson-egyenlet levezethető variációs elvből. Egy $\rho(\mathbf{r})$, időben állandó elektromos töltéseloszlás által létrehozott elektromos tér energiája az alábbi integrállal fejezhető ki:

$$U = \int d^3r\left(-\frac{\varepsilon_0}{2}(\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 + \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\right) = \int d^3r\left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\left((\partial_x\phi(\mathbf{r}))^2 + (\partial_y\phi(\mathbf{r}))^2 + (\partial_z\phi(\mathbf{r}))^2\right) + \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\right),$$

ahol $\phi(\mathbf{r})$ az elektromos potenciál, melyből az elektromos térerősség az $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ formulával számítható.

Az állítás az, hogy a kialakult elektromos tér olyan, hogy az minimalizálja a fenti energia funkcionált. A határfeltételt úgy szokás felvenni, hogy $\phi(r\to\infty) = 0$, azaz a potenciál nulla szintjét a végtelenben vesszük fel.

a.) Feltéve, hogy a potenciálfüggvényt a $\delta\phi(\mathbf{r})$ infinitezimális függvénnyel variáltuk, írja fel az U energiafunkcionál δU variációját!
b.) Parciális integrálás segítségével érje el, hogy a $\delta\phi(\mathbf{r})$ variáció deriváltjai már ne jelenjenek meg a kifejezésben, azaz hozza a funkcionál variációját az alábbi alakra:
$\delta U = \int d^3r\, M(\mathbf{r})\,\delta\phi(\mathbf{r})$!
Adja meg az $M(\mathbf{r})$ függvény kifejezését $\rho(\mathbf{r})$ és $\phi(\mathbf{r})$ segítségével! A parciális integrálás felületi tagjait dobja el! *(Megj: A felületi tagokról megmutatható, ha $\rho(\mathbf{r})$ csak egy véges térfogatban nem nulla, úgy eldobhatóak.)*
c.) Az energia minimális, ha δU eltűnik tetszőleges variációra. Ez ekvivalens az M($\mathbf{r}$) = 0 egyenlettel. Mutassa meg, hogy ez éppen az elektrosztatika Poisson-egyenlete!

HF6/3

Egy egydimenziós folytonos közeg Lagrange sűrűsége az alábbi alakú:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\psi)(\partial_x\psi) + \frac{\alpha}{6}(\partial_x\psi)^3 - \frac{\nu}{2}(\partial_x^2\psi)^2,$$

ahol a $\psi(x,t)$ mezővel írjuk le a közeget.

a.) A Lagrange-sűrűség segítségével írja fel az S hatás funkcionált!
b.) Írja fel a hatás δS variációjának kifejezését!

c.) Parciális integrálások segítségével érje el, hogy a hatás variációja az alábbi alakú legyen:
$\delta S = \int dt \int dx\, M(x,t)\, \delta\psi(x,t)$!

Fejezze ki M(x,t) függvényt a ψ mező és deriváltjainak segítségével! A megjelenő peremtagokat dobja ki!

d.) Írja fel az energiasűrűség kifejezését a modellben!

$$\varepsilon = \partial_t \psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} - \mathcal{L}$$

Gyakorlófeladatok

Gy6/1

Egy homogén izotrop rugalmas közeg Lagrange-sűrűsége az alábbi alakú:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}(\partial_t \mathbf{s})\cdot(\partial_t \mathbf{s}) - \frac{\lambda}{2}(\partial_x s_x + \partial_y s_y + \partial_z s_z)^2 - \mu\left((\partial_x s_x)^2 + (\partial_y s_y)^2 + (\partial_z s_z)^2\right),$$

Ahol $\mathbf{s}(\mathbf{r},t) = \left(s_x(\mathbf{r},t), s_y(\mathbf{r},t), s_z(\mathbf{r},t)\right)$ a közeg elmozdulás-mezője, ρ a sűrűség, λ és μ pedig a Lamé-állandók.

a.) Írja fel a közegre a hatás-funkcionált!

b.) Adja meg a közeg Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteit!

c.) Mutassa meg, hogy $\mathbf{s}(\mathbf{r},t) = \mathbf{s}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ síkhullám megoldások megoldják a mozgásegyenletet!

d.) Behelyettesítve a c.)-ben szereplő próbafüggvényt a mozgásegyenletbe a következő alakú összefüggést nyeri $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{k}$ és ω között:

$$\underline{\underline{M}}(\omega,\mathbf{k})\underline{s_0} = \underline{0}$$

Adja meg az M mátrixot!

e.) Haladjon a síkhullám a +x irányba, k nagyságú hullámszámvektorral! Adja meg ebben a speciális esetben is az M mátrixot!

f.) A d.)-ben szereplő egyenletnek csak akkor lehet nemzérus megoldása s_0-ra, ha a mátrix determinánsa 0. Ez alapján milyen lehetséges ω(k) összefüggéseket kap?

g.) Milyenek a lehetséges s_0 vektorok?

Gy6/2

Tekintse az alábbi Lagrange-sűrűséget:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_x \psi^*(x,t)\right)\left(\partial_x \psi(x,t)\right) - V(x)\psi^*(x,t)\psi(x,t) + \frac{1}{2}i\hbar\left(\psi^*(x,t)\partial_t\psi(x,t) - \psi(x,t)\partial_t\psi^*(x,t)\right),$$

Ahol ψ(x,t) egy komplex értékeket felvevő mező, ψ^*(x,t) a mező komplex konjugáltját jelöli. Előadáson ebből úgy vezették le a mozgásegyenletet, hogy a mezőt és annak komplex konjugáltjának variációját függetlennek tekintették (azaz egyszer variáltak $\delta\psi^*$ szerint úgy, hogy $\psi(x,t)$-t változatlanul hagyták, egyszer pedig $\delta\psi$ szerint úgy, hogy $\psi^*(x,t)$-t hagyták változatlanul.) Ez a módszer elsőre nagyon furcsa, ezért érdemes megoldani gyalogosabb módon is a feladatot.

a.) Kezelje a komplex hullámfüggvény valós és képzetes részét, mint egy két komponensű mezőt:

$$\psi(x,t) = \phi_1(x,t) + i\,\phi_2(x,t),$$

ahol $\phi_1(x,t)$ és $\phi_2(x,t)$ már tisztességes valós függvények.

Írja át a Lagrange-sűrűséget úgy, hogy benne ezek a valós mezők szerepeljenek!

b.) Mutassa meg, hogy a kapott Lagrange-sűrűség tisztán valós!

c.) Írja fel a hatás funkcionált!

d.) Írja fel az Euler-Lagrange egyenleteket amiket a ϕ_1 és ϕ_2 szerinti variálás után kapott.

e.) Mutassa meg, hogy a két egyenlet amit kapott, a szokásos:

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t)$$

alakú Schrödinger egyenlet valós és képzetes része!

Gy6/3

Egy L oldalú négyzet alakú fémkeretre szappanhártyát feszítettünk ki. Ebben a feladatban a célunk a szappanhártya állóhullám módusainak meghatározása. A szappanhártya felületi tömegsűrűségét jelölje λ, a felületi feszültségét pedig σ!

A szappanhártya Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\lambda(\partial_t u)^2 - 2\sigma\sqrt{1+(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2} \ ,$$

ahol u(x,y,t) a szappanhártya fémkeretre merőleges irányú kitérését jelöli. Az első tag a kinetikus energia járulék, a második a szappanhártya felületi energiájából származó járulék.

a.) Közelítse a Lagrange-sűrűségben szereplő gyökös tagot a deriváltakban másodrendig!

b.) Írja fel az Euler-Lagrange féle mozgásegyenleteket!

A peremfeltételünk szerint a négyzetes keret pontjaiban az u(x,y,t) függvény zérus, azaz $u(0,y,t) = u(x,0,t) = u(L,y,t) = u(x,L,t) = 0$.

c.) Keresse a mozgásegyenletek állóhullám-megoldásait az alábbi alakban:

$u(x,y,t) = A\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(\omega t+\varphi)$!

Mik a k_x és k_y hullámszámok peremfeltételek által megengedett lehetséges értékei?

d.) Adjuk meg a k_x és k_y hullámszámokkal jellemzett módus ω körfrekvenciáját!
