KisZh-án szerepelhető feladatok

HF4/1

Kísérleti tapasztalat, hogy a részecskék elektromos töltése Lorentz-invariáns, azaz egy gyorsan mozgó részecske töltése nem változik meg az állóhoz képest. Másik kísérleti tapasztalat, hogy az elektromos töltés megmaradó mennyiség, azaz a tér egy pontjából csak úgy tűnhet el, ha kiáramlik onnan. Ezt a megmaradási tételt fejezi ki a töltés kontinuitási egyenlete, amit az alábbi alakban szokás felírni:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

a.) Írja át ezt az egyenletet úgy, hogy benne térjen át a négyes téridő koordináták (x^0, x^1, x^2, x^3) szerinti deriválásra!

b.) Az a.) feladatban kapott egyenlet az alábbi alakot ölti: $\partial_\mu j^\mu = 0$. Olvassa le a j^μ komponenseit!

c.) Gyakorlaton szerepelt, hogy a $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ deriválás tisztességes alsóindexes vektorként transzformálódik. Ha azt szeretnénk, hogy a töltés-kontinuitási egyenlet minden vonatkoztatási rendszerben a fenti alakban fennálljon, úgy mutassuk meg, hogy j^μ egy tisztességes felsőindexes négyesvektor! (Tipp: szorozzuk meg c ρ_e-t dV dx^i –vel majd dt/dt-vel és használjuk ki, hogy $\mathbf{j}=\rho_e \mathbf{v}$, illtve, hogy c ρ_edV a töltés valamely térfogatban, így az Lorentz-invariáns, akárcsak dt dV.)

d.) Láthatjuk, hogy a négyes áramsűrűség vektor nulladik komponense lényegében a töltéssűrűség. Tekintsünk egy olyan elrendezést, ahol álló töltések egyenletesen töltik ki a teret, azaz ρ_e = const., $\mathbf{j} = 0$. Transzformáljuk át ezt a töltéselrendezést egy v sebességgel x irányba mozgó rendszerbe! Mit kaptunk?

e.) Hogyan értelmezhető, hogy a töltéssűrűség megnövekedett? (Gondoljon a Lorentz-kontrakcióra!)

(**Fontos megjegyzés**: *Ezt a feladatot direkt nem tömegsűrűséggel írtuk fel, ugyanis tudjuk, egy gyorsan mozgó részecske tömege relativisztikusan megnövekszik. Mint kiderül a tömegsűrűség (korrektebbül energiasűrűség) és tömegáramsűrűség (korrektebbül impulzussűrűség) egy csúnyább jószág, a $T^{\mu\nu}$ energia-impulzus négyestenzor elemei.*)

Gyakorlófeladatok

Gy4/1 feladat

Gyakorlaton szerepelt a relativisztikus rakéta modellje. Ezt általánosítva most a „fotonrakéta” modelljét kell vizsgálnia. A rakéta kezdeti nyugalmi tömege M_0, a rakéta hajtóműve egy igen intenzív fotonnyalábot bocsájt ki, ez biztosítja a meghajtást. Az egyszerűség kedvéért a rakéta mozogjon egyenes pályán!

a.) Tekintse azt a pillanatot, amikor a rakéta nyugalmi tömege M. Üljön be a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerbe. A hajtómű kisugároz $d\varepsilon$ fotoenergiát. Ez alapján adja meg a rakéta nyugalmi tömegének csökkenését!

b.) Adja meg az előbbi esetben a rakéta dv sebességváltozását! Ebből adja meg a rakéta $d\theta$ rapiditásváltozását is!

c.) A fotonrakétával a Naphoz képest $3/5c$ utazósebességet szeretnénk elérni. Nyugalmi tömegének hány százalékát kell ehhez elveszítenie a rakétának?

d.) Mutassuk meg, hogy a c.) feladatban kapott tömegveszteség kisebb, mint a gyakorlaton szereplő szokásos rakéta esetén!

e.) A rakétával szeretnénk elutazni az Alpha Centauri rendszerbe, ami a Naprendszertől $4{,}3$ fényévre található. Ehhez először fel kell gyorsítani $3/5c$ sebességre, majd lefékezni. Feltehetjük, hogy az Alpha Centauri Naphoz képest mért sebessége a fénysebességhez képest elhanyagolható. Hány százalékkal csökken az űrhajó tömege az utazás végére?

f.) Feltéve, hogy a gyorsítás és lassítás elhanyagolható időt vesz igénybe az utazás összidejéhez képest, hány évet öregszenek az űrhajó utasai az utazás során?

Gy4/2 feladat

Egy m_0 nyugalmi tömegű q töltésű részecskét homogén E nagyságú statikus elektromos térbe lőttünk, az elektromos térre merőlegesen, v_0 kezdeti sebességgel. Írjuk le a részecske mozgását! Legyen az elektromos tér y irányú, a részecske kezdeti sebessége pedig mutasson az x irányba!

a.) Adja meg a részecske mozgását nemrelativisztikus közelítésben!

b.) Írja fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

c.) Oldja meg a mozgásegyenletet a részecske impulzusára, azaz adjuk meg a $p_x(t)$ és $p_y(t)$ függvényeket!

d.) Fejezze ki a (hármas)impulzusvektor hosszát az idő függvényében, és ebből határozza meg a sebesség nagyságát az idő függvényében! ($|\vec{v}(t)| = ?$)

e.) Adja meg a részecske sebességvektorának $v_x(t)$ és $v_y(t)$ komponenseit!

f.) Gyakorlásként oldja meg a feladatot az órán is látott relativisztikusan kovariáns egyenlet segítségével:

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = qF^{\mu}_{\cdot\nu} u^\nu .$$

Mik a kezdeti feltételek?

Gy4/3 feladat

Egy q töltésű m_0 nyugalmi tömegű részecske homogén, z-irányú, $\mathbf{B} = (0,0,B)$ mágneses indukciójú térben mozog. A részecske sebessége a t=0 időpontban $\mathbf{v}_0 = \left(0, \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$, azaz nem merőleges a mágneses tér irányára. Írja le a részecske mozgását!

a.) Írja fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

b.) Mutassa meg, hogy a részecske szokásos (hármas) sebességvektorának nagysága az időben állandó.

c.) Ezt felhasználva írja fel a mozgásegyenletet $\frac{d\vec{v}}{dt}$ -re!

d.) Mutassa meg, hogy az egyenlet kezdeti feltételeknek is megfelelő megoldása az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{v}(t) = \left(-\frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}} \cos(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}} \right)$$

Adja meg Ω értékét!

e.) Hozzávetőlegesen rajzolja fel a részecske háromdimenziós pályáját!

f.) Gyakorlásként oldja meg a feladatot az órán is látott relativisztikusan kovariáns egyenlet segítségével:

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = qF^{\mu}_{\ .\nu} u^\nu .$$

Mik a kezdeti feltételek?

C03.) feladat

Gyakorlaton és a B07.) feladatban is láthattuk, hogy egy relativisztikusan gyors űrhajó, amivel emberi léptékű idő alatt elérhetőek a legközelebbi csillagok, nagyon sok üzemanyagot használ. Ezért a következő ötletet eszeltük ki:

Az űrhajónk nem cipeli magával az üzemanyagot, helyette egy nagyméretű, fénytükröző „vitorlával" szereljük fel. A Földön létrehozunk egy igen erős, jól fókuszált fotonnyalábot, ezzel megcélozzuk az űrhajó vitorláját. A fény a vitorláról gyakorlatilag 180º-ban visszaverődik, így adva impulzust az űrhajónak. A fékezést hasonló módon oldjuk meg, a célállomáson is létrehozunk egy fotonnyalábot, és érkezés előtt ezt az űrhajóra irányítva lefékezzük azt.

A célunk ismét az, hogy $3/5c$ utazósebességre gyorsítsuk az űrhajót, aminek nyugalmi tömege M_h. (Ez a hasznos tömeg, amit el akarunk juttatni a célba)

a.) Adja meg, a Földi fotonforrásnak összesen mekkora ε_{gy} energiányi fényt kell az űrhajóra sugároznia, hogy az elérje az utazósebességet! Legyen óvatos a visszaverődő fény frekvenciájával!

b.) Adja meg, a célállomás fotonforrásának összesen mekkora ε_f energiányi fényt kell az űrhajóra sugároznia, hogy azt lefékezze!

c.) Mennyi energiát spórolunk így összesen a B07.) feladatban szereplő fotonrakétához képest?