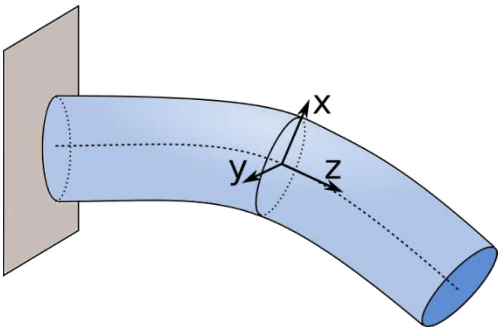
Problem 1.)



A thin and long elastic rod is bent. In this problem our goal is to describe the stress and deformation tensors in the rod.

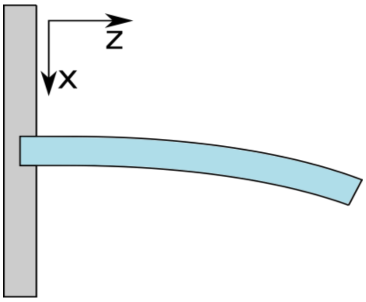
a.) (SOLVED IN LAST CLASS) Using the fact that at the surface of the rod there are no external forces present, and the rod is thin, ascertain us that in the rod only longitudinal („zz") stress can be present.

b.) (SOLVED IN LAST CLASS) In a short (lenght dl) piece of the rod, the radius of curvature of the bent rod is R, that is quite large (weakly bent rod). Determine the elements of the deformation tensor for that piece in the coordinate system where the axis of the rod is the z-direction, and the rod is (locally) bent in the x-z plane. (see figure!)

c.) Determine the so-called bending moment.

d.) Derive the expression for the rods total elastic energy.

Problem 2.)



A thin and havy rod of length L is horizontally fasten in a wall (see figure). The other end of the rod is free. The axis of the (non bent) rod is the z axis while the vertical axis is the x axis. The Young's modulus of the rods material is E, the cross-section parameter is Θ, and the rod's linear mass density is ρ.

a.) Determine the bending moment in the rod as a function of *z*.

b.) Write down the differential equation that describes the shape of the bent rod.

c.) Determine the shape of the rod. What is the prolapse of the free end of the rod?

Problem 3.)

Consider the longitudinal waves traveling in a thin, elastic rod. The longitudinal displacement of the points of the rod is described by the field $\xi(x,t)$. The Young's modulus of the rod is *E*, its mass density is ρ, and its cross-secion is *A*.

a.) Write down the (linear-) density of the kinetic energy as a function of the time-derivative of the field.
b.) Write down the (linear-) density of the elastic energy as a function of the *x*-derivative of the field.
c.) Write down the Lagrangian of the system
d.) Using the principle of least action determine the equations of motion for the system.
e.) From the action, determine the expression for the (total) energy density in the system.
f.) Write down the energy of in a finite piece of the system. Determine its time-derivative
g.) Determine the expression for the energy-current in the system. Derive the continuity equation for the energy.

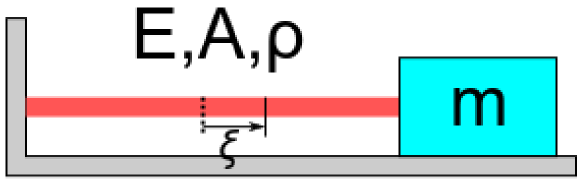
Problem 4.)

Consider the transversal waves of an elastic rod. The cross-section parameter of the rod is Θ, its linear mass density is λ, and its Young's modulus is *E*. The Lagrangian of the system reads as

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{2}\left(\partial_t u\right)^2 - \frac{\Theta E}{2}\left(\partial_z^2 u\right)^2 \ .$$

The two ends are fixed horizontally in two walls, therefore at the ends both the displacement, both its z-derivative is zero.

a.) Write down the action for the system.
b.) Using the principle of least action derive the equations of motion for the system.
c.) Search the solution in the separated form: $u(z,t) = U(z)\varphi(t)$. Write down the appropriate equations for *U(z)* and $\varphi(t)$.
d.) Write down the equation that determines the free oscillation frequencies of the system. Qualitatively solve the equation, graphically.



Problem 5.)

A body of mass m is fixed to the end of an elastic rod. The cross-section of the rod is A, its Young's modulus is E, its (usual 3-dimensional) mass-density is ρ, and the length of the rod is *L*. The longitudinal displacement of the points of the rod is described by the field $\xi(z,t)$, the transversal displacement of the rod is negligible in our case. The position of the body is described by *u(t)*. The action of the system is

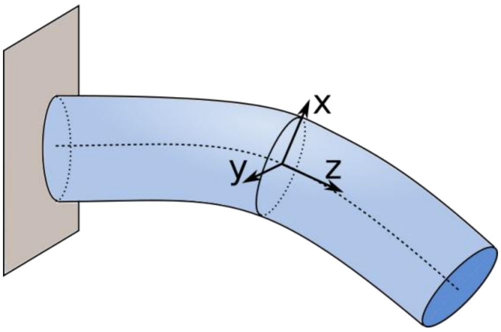
$$S = \int dt \left\{ \int_0^L dz \left(\frac{\rho A}{2} (\partial_t \xi)^2 - \frac{EA}{2} (\partial_z \xi)^2 \right) + \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right\}.$$

As we see, if one naiively derives the equations of motion of this action, one gets a trivially wrong result: the will not be fixed to the end of the rod. We have to include the constraint $\xi(L,t) = u(t)$ explicitely in the calculations.

a.) The constraint can be taken into account using a (time-dependent) Lagrange-multiplicator. Write down the action modified by the Lagrange multiplicator.
b.) Write down the variation of the action, if the variation of the field and the position of the body are $\delta\xi(z,t)$ and $\delta u(t)$, respectively.
c.) Following the usual way, using integrations by part transform the action in a form where only the δu and $\delta\xi$ are present, while their derivatives are not. In the case of $\delta\xi$, be careful at the boundary z = L.
d.) Using the principle of least action derive the equations of motion for the system.
e.) Search the solution in the following wave-form,
$\xi(z,t) = B\sin(kz)\sin(\omega t)$.
Determine the connection between *k* and ω.
f.) Starting from the solution of e.) write down the equation of motion for the body. You should arrive to a transcendent equation for the possible *k* values. Don't solve the equation.
g.) Discuss the limit, when the mass of the body is negligible. What are the free oscillation frequencies of the system in that case?
h.) Discuss the limit, when the mass of the rod is negligible. What is the smallest free oscillation frequency in that case?
i.) Determine the energy density and energy current in the rod. Show that the energy current that „flows out" from the rod at the body is exactly the time derivative of the body's kinetic enegy.

MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz)	GYAK 6.

1.) Feladat



Egy kesekeny de hosszú rugalmas rudat meghajlítottunk. A célunk ebben a feladatban a rúdban kialakult feszültségek és deformációk jellemzése.

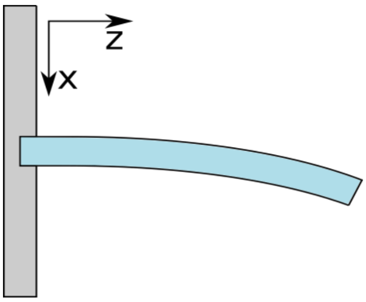
a.) (SZEREPELT ELŐZŐ GYAKORLATON) Kihasználva, hogy a rúd felületén nem lépnek fel külső erők, mutassuk meg, hogy a (kellően keskeny) rúdban csak a hosszirányú feszültségek lehetnek jelentősek.

b.) (SZEREPELT ELŐZŐ GYAKORLATON) A rúd egy rövid (*dl* hosszú) darabjának görbületi sugara R, ami igen nagy (gyenge hajlítás.) Adjuk meg ezen darabkában a deformációtenzor elemeit abban a koordinátarendszerben, ahol a rúd „érintője” z irányú, és (lokálisan) a z-x síkban van meghajlítva a rúd!

c.) Adjuk meg a darabka határán fellépő ún. hajlítónyomatékot!

d.) Adjuk meg a darabkában tárolt rugalmas energiát!

2.) Feladat



Egy keskeny, de nehéz *L* hosszúságú rudat az egyik végén vízszintesen befalaztunk. A másik vége szabadon lóg. Legyen a rúd (terheletlen) tengelye a *z* tengely, a függőleges irány az *x* tengely. A rúd Young modulusa *E*, keresztmetszeti tényezője Θ, lineáris sűrűsége ρ.

a.) Adjuk meg a rúdban ébredő hajlító nyomatékot a z függvényében!

b.) Írjuk fel a rúd alakját meghatározó differenciálegyenletet!

c.) Adjuk meg a rúd alakját! Mennyit hajlik le a szabad vége?

3.) Feladat

Egy keskeny rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámokat vizsgáljuk. A rúd pontjainak longitudinális elmozdulását a $\xi(x,t)$ elmozdulásmezővel írjuk le. A rúd anyagának Young modulusa *E*, (nyújtatlan) sűrűsége ρ, keresztmetszete *A*.

h.) Írjuk fel a kinetikus energia (lineáris) sűrűségének kifejezését az elmozdulásmező idõderiváltjának segítségével!
i.) Írjuk fel a rugalmas energia (lineáris) sűrűségének kifejezését az elmozdulás mező *x*-szerinti deriváltjának segítségével!
j.) Írjuk fel a rendszer Lagrange-sűrűségét!
k.) A legkisebb hatás elvének segítségével vezessük le a rendszer (Euler-Lagrange féle) mozgásegyenletét!
l.) Adjuk meg a teljes (kinetikus + rugalmas) lineáris energiasűrűség kifejezését a rendszerben!
m.) Tekintsük a rúd egy véges darabját, írjuk fel ennek teljes energiáját! Írjuk fel a darab energiájának idő szerinti deriváltját!
n.) Fejezzük ki az energiaáramsűrűséget a modellben! Írjuk fel az energia kontinuitási egyenletét!

4.) Feladat

Egy rugalmas rúdon kialakuló transzverzális állóhullám módusokat vizsgáljuk. A rúd keresztmetszeti tényezője Θ, lineáris tömegsűrűsége λ, anyagának Young-modulusa *E*. A rendszer

Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{\Theta E}{2}(\partial_z^2 u)^2$$

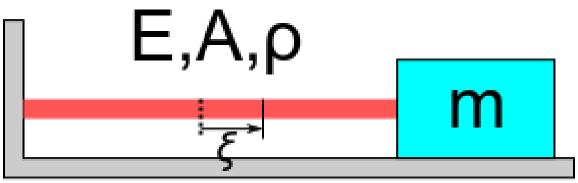
A rúd két végét befalaztuk, ezért ott mind a kitérés, mind annak z szerinti deriváltjai eltűnnek.

e.) Írjuk fel a hatásfunkcionált a rendszerre!

f.) A legkisebb hatás elvéből vezessük le a rendszer Euler-Lagrange mozgásegyenletét

g.) Keressük az egyenlet megoldását szeparált alakban: $u(z,t) = U(z)\varphi(t)$! Adjuk meg külön-külön az *U(z)*-re és $\varphi(t)$-re vonatkozó egyenleteket!

h.) Adjuk meg a rúd lehetséges rezgési frekvenciáit meghatározó egyenletet, és grafikusan oldjuk meg (kvalitative)!



5.) Feladat

Egy rugalmas rúd végére *m* tömegű testet kötöttünk. A rúd keresztmetszete *A*, Young-modulusa *E*, (térfogati) sűrűsége ρ, hossza *L*.

A rúd pontjainak hosszirányú elmozdulását a $\xi(z,t)$ mezővel írjuk le, a rúd transzverzális kitérése a vizsgált mozgások során zérus. A tégla helyét az *u(t)* függvénnyel írjuk le, ezért a rendszer hatásfunkcionálja az alábbi alakot ölti:

$$S = \int dt \left\{ \int_0^L dz \left(\frac{\rho A}{2}(\partial_t \xi)^2 - \frac{EA}{2}(\partial_z \xi)^2 \right) + \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right\}$$

Ha ebből a kifejezésből naiv módon felírjuk a mozgásegyenleteket, nyilvánvalóan rossz eredményt kapunk, a tégla nem lesz a gumiszálhoz kötve. A $\xi(L,t) = u(t)$ kényszert ki kell rónunk.

j.) A kényszert egy Lagrange-multiplikátor segítségével vegye figyelembe! Írja fel a Lagrange multiplikátorral módosított hatásfunkcionált!

k.) Írja fel a hatás δS variációját, amennyiben, ha a közeg ill. tégla kitérésének variációja $\delta u(t)$ és $\delta\xi(z,t)$.

l.) A szokásos módon, parciális integrálással érje el, hogy a hatás-funkcionálban ne jelenjenek meg a δu és $\delta\xi$ variációk deriváltjai! A $\delta\xi$ esetén vigyázzon a *z* = *L*-nél megjelenő peremtaggal!

m.) A legkisebb hatás elvét alkalmazva adja meg a rendszer mozgásegyenleteit!

n.) Keresse a hullámegyenlet megoldását állóhullám alakban:
$\xi(z,t) = B\sin(kz)\sin(\omega t)$.
Adja meg a *k* és ω közötti összefüggést!

o.) Az e.) feladatban kapott általános megoldást helyettesítse be a test mozgásegyenletébe! Ez alapján adja meg a lehetséges *k* hullámszámokat meghatározó (transzcendens) egyenletet! Az egyenletet megoldania nem kell!

p.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege elhanyagolhatóan kicsi. Mekkorák ekkor a rendszer sajátfrekvenciái? Hogyan értelmezhető az eredmény?

q.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege nagyon nagy. Mekkora ekkor a legkisebb sajátfrekvencia? Minek felel ez meg? Mekkora a többi sajátfrekvencia? Hogyan értelmezhetők ezek?

r.) Fejezzük ki az energiasűrűséget és energiaáramsűrűséget a rúdban. Mutassuk meg, hogy a rúdból „kifolyó” energiaáram éppen a test mozgási energiájává alakul!