

1.) Feladat

Egy tömegpont az x - y síkon mozoghat a $V(x,y)$ potenciális energiával jellemzett konzervatív erőterben.

- Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét majd ebből vezesse le a Hamilton függvényt, mint p_x, p_y, x és y függvényét!
- Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét úgy, hogy a tömegpont helyzetét az r és φ síkbeli polárkoordinátákkal írjuk le. ($x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$)
- Vezesse le a rendszer Hamilton-függvényét mint p_r, p_φ, r és φ függvényét! Mutassa meg, hogy az új (K-val jelölt) Hamilton függvény egyenlő a régi H-val, csak benne változócsere kell végrehajtani.
- Fejezze ki az x és y Descartes koordinátákhoz rendelt p_x és p_y kanonikus impulzusokat p_r, p_φ, r és φ segítségével!
- Mutassa meg, hogy az $\{x, y, p_x, p_y\}$ változók közötti kanonikus Poisson-zárójelek nem változnak, ha azokat a polár-koordinátarendszer kanonikus koordinátaival és impulzusaival számítjuk ki!
- Mutassa meg, hogy centrális potenciál ($V=V(r)$) esetén a p_φ időállandó!

2.) Feladat

Egy tömegpont az x - y síkon mozoghat a $V(x,y)$ potenciális energiával jellemzett konzervatív erőterben.

- Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét majd ebből vezesse le a Hamilton függvényt, mint p_x, p_y, x és y függvényét!
- Át szeretnénk térni forgó koordinátarendszerbe, azaz a következő változókra:

$$x(t) = X(t) \cos(\omega t) - Y(t) \sin(\omega t)$$

$$y(t) = X(t) \sin(\omega t) + Y(t) \cos(\omega t)$$
 Írja fel a Lagrange-függvényt az X és Y változóban!
- Határozzuk meg az új K Hamilton függvényt az X, Y, P_X és P_Y függvényében! Hogy viszonyul ez az álló koordinátarendszer-beli koordinátákkal kifejezett Hamilton-függvényhez?
- Mutassa meg, hogy az $\{x, y, p_x, p_y\}$ változók közötti kanonikus Poisson-zárójelek nem változnak, ha az új $\{X, Y, P_X, P_Y\}$ kanonikus változók szerint fejezzük ki őket.

3.) Feladat

A $\{q, p\}$ kanonikus koordináta és impulzus kettősét az előadáshoz hasonlóan jelölje az $\underline{\eta}$ vektor. Tekintse az alábbi transzformációt:

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \\ q \cot p \end{pmatrix}$$

- Fejezze ki az $M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$ Jacobi mátrixot!
- Mutassa meg, hogy a fenti transzformáció invariánsan hagyja a J_{ij} mátrixszal leírt szimplektikus struktúrát:

$$M_{ik} J_{kl} M_{jl} = J_{ij},$$

ahol

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

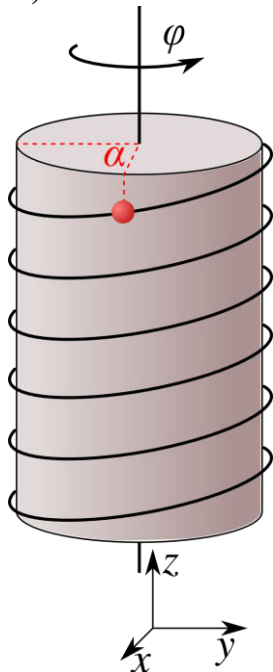
4.) Feladat

Az előadáson szerepelt a Poisson zárójel néhány tulajdonsága:

- $[F, G] = -[G, F]$
- $[F, aG + bD] = a[F, G] + b[F, D]$, ahol a, b valós számok
- $[F, GD] = G[F, D] + [F, G]D$
- Jacobi azonosság: $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

Ezek közül az első három bizonyítása triviális, a Jacobi azonosság azonban igen komplikált. Használjuk a szimplektikus mátrixos jelölést, és bizonyítsuk a Jacobi azonosságot! Használjuk ki a J szimplektikus mátrix antiszimmetrikus voltát!

5.) Feladat



Egy kör alapú hengerre egy spirál alakú drótpályát cséveltünk, amin egy m tömegű gyöngyszem súrlódás nélkül mozoghat. A henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére Θ , és a tengely körül könnyen (súrlódás nélkül) elfordulhat. A rendszer helyzetét a henger φ elfordulásával és a gyöngyszem α helyzetével írjuk le. A gyöngyszemre hat a külső gravitációs erőter is.

A gyöngyszem x, y, z koordinátáit a két szöggel az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$$x = R \sin \alpha$$

$$y = -R \cos \alpha,$$

$$z = C(\alpha - \varphi)$$

Ahol C jelöli a spirál menetemelkedését.

a.) Konstruálja meg a rendszer Lagrange-függvényét!

b.) Fejezze ki a p_α és p_φ kanonikus impulzusokat!

c.) A Gy7/1 házi feladatban Noether tétel segítségével megmutattuk, hogy a rendszer impulzusmomentuma mozgásállandó:

$$L = mR^2 \dot{\alpha} + \Theta \dot{\varphi}$$

Fejezze ki az impulzusmomentumot a p_α és p_φ kanonikus impulzusok segítségével!

d.) Előadáson szerepelt, hogy a mozgásállandók szimmetriatranszformációkat generálnak. Milyen transzformációt generál L ?

6.) Feladat

Egy izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2)$$

a.) A Gy7/2-es feladatban megmutattuk, hogy az alábbi 2x2-es szimmetrikus mátrix elemei megmaradó mennyiségek:

$$A_{ij} = \frac{1}{2m} (p_i p_j + m^2 \omega^2 r_i r_j)$$

Ismételjük meg a HF számításait, mutassuk meg, hogy valóban megmaradó mennyiségekről van szó!

b.) Milyen szimmetria transzformációkat generálnak az egyes mátrixelemek?

c.) Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$S_1 = \frac{A_{12}}{\omega}, \quad S_2 = \frac{A_{22} - A_{11}}{2\omega}, \quad S_3 = \frac{L}{2} = \frac{1}{2} (xp_y - yp_x)$$

Mutassuk meg, hogy $[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$.

d.) Mutassuk meg, hogy $H^2 = 4 \omega^2 (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$!