MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	GYAK 6.

1.) Feladat

Az előző gyakorlaton láttuk, hogy egy gyengén meghajlított rúd *χ(z)* alakját meghatározó egyenlet az alábbi alakba írható:

$$E\Theta \frac{d^2\chi}{dz^2} = M(z),$$

ahol *M(z)* a rúdban ébredő hajlítónyomaték. Ez az egyenlet ebben a formában azonban csak akkor használható, ha valahonnan tudjuk az *M(z)* hajlítónyomatékot. Ez csak akkor van így, ha az elrendezés statikailag nem túlhatározott, azaz a rúd globális egyensúlyi egyenletei minden tartóerőt egyértelműen meghatároznak. Statikailag túlhatározott esetben (pl. háromtámaszú tartó) nem tudjuk az *M(z)* függvényt.

Tekintsünk egy rudat, amire függőlegesen a *p(z)* lineáris erősűrűséggel jellemzett (ún. elosztott) terhelés hat. Ezt úgy kell értelmezni, hogy egy *dz* hosszúságú darabra $dF = p(z)dz$ erő hat.

a.) Mutassuk meg, hogy a hajlítónyomatékra teljesül a következő egyenlet:

$$\frac{d^2M}{dz^2} = p(z)$$

b.) Ez alapján mutassuk meg, hogy a rúd alakját az alábbi (negyedrendű) differenciálegyenlet határozza meg:

$$E\Theta \frac{d^4\chi}{dz^4} = p(z)$$

c.) Tekintsük a könnyű (elhanyagolható tömegű), végén F erővel terhelt rúd problémáját! (HF5, Gy5/2) Oldjuk meg ennek az egyenletnek a segítségével! Mik a peremfeltételek?

d.) Tekintsük az önsúlyától lehajló rúd problémáját (GYAK5 5. feladat) Oldjuk meg az új módszerrel az egyenleteket. Itt mik a peremfeltételek?

2.) Feladat

Egy keskeny rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámokat vizsgáljuk. A rúd pontjainak longitudinális elmozdulását a *ξ(x,t)* elmozdulásmezővel írjuk le. A rúd anyagának Young modulusa *E*, (nyújtatlan) sűrűsége *ρ*, keresztmetszete *A*.

a.) Írjuk fel a kinetikus energia (lineáris) sűrűségének kifejezését az elmozdulásmező időderiváltjának segítségével!

b.) Írjuk fel a rugalmas energia (lineáris) sűrűségének kifejezését az elmozdulás mező *x*-szerinti deriváltjának segítségével!

c.) Írjuk fel a rendszer Lagrange-sűrűségét!

d.) A legkisebb hatás elvének segítségével vezessük le a rendszer (Euler-Lagrange féle) mozgásegyenletét!

e.) Adjuk meg a teljes (kinetikus + rugalmas) lineáris energiasűrűség kifejezését a rendszerben!

f.) Tekintsük a rúd egy véges darabját, írjuk fel ennek teljes energiáját! Írjuk fel a darab energiájának idő szerinti deriváltját!

g.) Fejezzük ki az energiaáramsűrűséget a modellben! Írjuk fel az energia kontinuitási egyenletét!

3.) Feladat

Egy rugalmas rúdon kialakuló transzverzális állóhullám módusokat vizsgáljuk. A rúd keresztmetszeti tényezője *Θ*, lineáris tömegsűrűsége *λ*, anyagának Young-modulusa *E*. A rendszer Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda}{2}\left(\partial_t u\right)^2 - \frac{\Theta E}{2}\left(\partial_z^2 u\right)^2$$

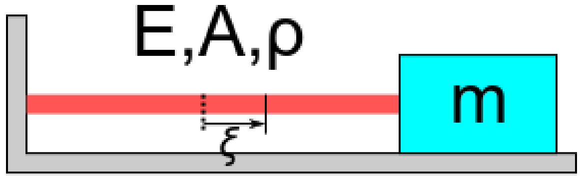
A rúd két végét befalaztuk, ezért ott mind a kitérés, mind annak *z* szerinti deriváltjai eltűnnek.

a.) Írjuk fel a hatásfunkcionált a rendszerre!

b.) A legkisebb hatás elvéből vezessük le a rendszer Euler-Lagrange mozgásegyenletét c.) Keressük az egyenlet megoldását szeparált alakban: $u(z,t)=U(z)\varphi(t)$! Adjuk meg külön-külön az $U(z)$-re és $\varphi(t)$-re vonatkozó egyenleteket!

d.) Adjuk meg a rúd lehetséges rezgési frekvenciáit meghatározó egyenletet, és grafikusan oldjuk meg (kvalitative)!

4.) Feladat



Egy rugalmas rúd végére m tömegű testet kötöttünk. A rúd keresztmetszete A, Young-modulusa E, (térfogati) sűrűsége ρ, hossza L.

A rúd pontjainak hosszirányú elmozdulását a $\xi(z,t)$ mezővel írjuk le, a rúd transzverzális kitérése a vizsgált mozgások során zérus. A tégla helyét az $u(t)$ függvénnyel írjuk le, ezért a rendszer hatásfunkcionálja az alábbi alakot ölti:

$$S=\int dt\left\{\int_0^L dz\left(\frac{\rho A}{2}\left(\partial_t\xi\right)^2-\frac{EA}{2}\left(\partial_z\xi\right)^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right\}$$

Ha ebből a kifejezésből naiv módon felírjuk a mozgásegyenleteket, nyilvánvalóan rossz eredményt kapunk, a tégla nem lesz a gumiszálhoz kötve. A $\xi(L,t) = u(t)$ kényszert ki kell rónunk.

a.) A kényszert egy Lagrange-multiplikátor segítségével vegye figyelembe! Írja fel a Lagrange multiplikátorral módosított hatásfunkcionált!

b.) Írja fel a hatás δS variációját, amennyiben, ha a közeg ill. tégla kitérésének variációja $\delta u(t)$ és $\delta\xi(z,t)$.

c.) A szokásos módon, parciális integrálással érje el, hogy a hatás-funkcionálban ne jelenjenek meg a δu és $\delta\xi$ variációk deriváltjai! A $\delta\xi$ esetén vigyázzon a z = L-nél megjelenő peremtaggal!

d.) A legkisebb hatás elvét alkalmazva adja meg a rendszer mozgásegyenleteit!

e.) Keresse a hullámegyenlet megoldását állóhullám alakban:
$\xi(z,t)=B\sin(kz)\sin(\omega t)$.
Adja meg a k és ω közötti összefüggést!

f.) Az e.) feladatban kapott általános megoldást helyettesítse be a test mozgásegyenletébe! Ez alapján adja meg a lehetséges k hullámszámokat meghatározó (transzcendens) egyenletet! Az egyenletet megoldania nem kell!

g.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege elhanyagolhatóan kicsi. Mekkorák ekkor a rendszer sajátfrekvenciái? Hogyan értelmezhető az eredmény?

h.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege nagyon nagy. Mekkora ekkor a legkisebb sajátfrekvencia? Minek felel ez meg? Mekkora a többi sajátfrekvencia? Hogyan értelmezhetők ezek?

i.) Fejezzük ki az energiasűrűséget és energiaáramsűrűséget a rúdban. Mutassuk meg, hogy a rúdból „kifolyó” energiaáram éppen a test mozgási energiájává alakul!