
1.) Feladat

Tekintse a függőleges hajítás problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+mgx$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az $S(x,\ t)$ függvényt $S(x,t)\ =\ S_0(x,E)\text{-}E\ t$ alakban, ahol E egy állandó. Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?

c.) Oldja meg az S_0-ra vonatkozó egyenletet!

d.) Az $S(x,E,t)$ függvény ismeretében adja meg az általa, mint alkotófüggvény által generált kanonikus transzformációt, azaz fejezze ki az E-hez kanonikusan konjugált β_E koordinátát!

e.) A $t\ =\ 0$ időpillanatban a vizsgált tömegpont az $x\ =\ 0$ pontból indult p_0 impulzussal. Ez alapján adja meg az E paraméter értékét, és a β_E konstans értékét!

f.) Adja meg a mozgásegyenlet x(t) megoldását!

2.) Feladat

Tekintsen egy egydimenziós harmonikus oszcillátort, aminek Lagrange-függvénye:

$$L=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

a.) Írja fel a Lagrange-féle mozgásegyenleteket! Adja meg a megoldás általános alakját!

b.) Keressen olyan megoldást, amire $x(0)\ =\ 0$ és $x(t_v)\ =x_v$!

c.) Határozza meg az S hatásfüggvény értékét, amit a b.)-ben kapott megoldás mentén a hatásfunkcionál felvesz! Jelölje ezt $S(x_v\ ,t_v)$!

d.) Mutassa meg, hogy S kielégíti a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

e.) Mivel egyenlő $\dfrac{\partial S}{\partial t_v}$?

3.) Feladat

Tekintse a kétdimenziós anizotróp harmonikus oszcillátor problémáját! A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(p_x,p_y,x,y)=\frac{p_x{}^2+p_y{}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_x{}^2x^2+\frac{1}{2}m\omega_y{}^2y^2$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az S függvényt $S(x,y,t)\ =\ S_0(x,y,E)\text{-}\ E\ t$ alakban, ahol E egy állandó! Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?

c.) Szeparálja az S_0 függvényt, azaz keresse az alábbi alakban a megoldást:
$S_0(x,y,E,\alpha)=S_x(x,E,\alpha)+S_y(y,E,\alpha)$!

Milyen egyenleteket elégít ki S_x és S_y? A megjelenő új állandót α-val jelöltük.

d.) Adja meg az S_x, S_y függvényeket, és ezzel a Hamilton-Jacobi egyenlet teljes $S(x,y,E,\alpha,t)$ megoldását!

e.) A $t\ =\ 0$ időpontban a tömegpont az $x{=}x_0$ és $y{=}y_0$ kezdőpontból indult zérus impulzussal. Adja meg az E és β paraméterek értékeit!

f.) Hogyan nyerhetjük $S(x,y,E,\alpha,t)$, és a kezdeti feltételek ismeretében az $x(t)$ $y(t)$ megoldásokat? (Nem kell végigszámolnia, nagyon hosszadalmas!)

4.) Feladat

Két azonos *m* tömegű tömegpontot egy *D* rugóállandójú rugó köt össze, a tömegpontok az *x* tengely mentén mozoghatnak, a rendszer Hamilton-függvénye az alábbi:

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}D(x_1 - x_2)^2$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény nem függ explicit módon az időtől, keresse az *S* függvényt $S(x_1, x_2, t) = S_0(x_1, x_2, E) - Et$ alakban, ahol E egy állandó! Milyen egyenletet elégít ki az S_0 függvény?

c.) Láthatóan a további x_1 ,x_2 szerinti szeparálást nem tudja közvetlenül elvégezni. Térjünk át az egyenletben az $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = x_1 - x_2$ változókra, azaz írja fel a b.) feladatban nyert S_0-ra vonatkozó egyenletet az *X* és *y* változók szerint!

g.) Szeparálja az S_0 függvényt az alábbi alakban:
$S_0(X, y, E, \alpha) = S_X(X, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha)$!
Milyen egyenletet elégít ki S_X és S_y? A megjelenő új állandót jelölje α-val!

d.) Adja meg az S_X és S_y függvényeket!

e.) A kezdeti feltételek ($x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $p_{1,0}$ és $p_{2,0}$) ismeretében adja meg az α és *E* paraméterek értékét!
