1. Vektorterek

A $V = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots\}$ halmaz $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$elemeit *vektor*oknak és V-t az R valós számtest felett definiált *valós vektortér*nek nevezzük, ha definiáltunk egy $S : V \times V \mapsto V$ és egy $M : R \times V \mapsto V$ leképezést az alább felsorolt tulajdonságokkal:

Az S leképezéssel az $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V$ elempárhoz rendelt $\mathbf{z} \in V$ elemet az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ (vektor)*összegé*nek fogjuk nevezni (jelölésben: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$), ha $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ esetén:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (kommutativitás)
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (asszociativitás a vektorösszeadásra)
3. $\exists! \mathbf{O} \in V$ úgy, hogy $\mathbf{O} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (létezik egy és csak egy nullvektor)
4. $\exists \mathbf{w} \in V$ úgy, hogy $\mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{O}$ (létezik $\mathbf{x}$ vektor ellentettje, amit $\mathbf{w} = -\mathbf{x}$-szel jelölünk)

Hasonló módon az M leképezéssel az $(a, \mathbf{x}) \in R \times V$ elempárhoz rendelt $\mathbf{y} \in V$ elemet az $\mathbf{x}$ vektor a számmal való szorzottjának (*a-szorosának*) fogjuk nevezni (jelölésben: $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$), ha $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\forall a, b \in R$ esetén fennáll, hogy:

1. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
2. $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$ (asszociativitás skalárral történő szorzásra)
3. $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ (disztributivitás a skalárösszeadásra)
4. $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ (disztributivitás a vektorösszeadásra)

A továbbiakban csak valós vektorterekről lesz szó, ezért elhagyjuk a valós jelzőt. Néhány példa vektorterekre.

1. A rendezett valós szám n-esek tere, aminek egy eleme $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alakú. Ha az $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ elemekre az összeadás szabálya:
$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
és az a számmal való szorzás szabálya pedig:
$$a\mathbf{X} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$
2. A valós számok halmazán értelmezett ún. valós függvények tere, ha az összeadást és a számmal való szorzást a függvényeknél megszokott módon definiáljuk.
3. A valós számok halmazán értelmezett legfeljebb n-ed fokú polinomok tere.

Definiáljuk az $\mathbf{x}_i \in V$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vektoroknak az $a^i \in R$ együtthatókkal képezett *lineáris kombináció*ját:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} a^i \mathbf{x}_i.$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_i$ $(\neq \mathbf{O})$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha a $\mathbf{v} = \mathbf{O}$ fennállásából következik, hogy $\forall i$ esetén $a^i = 0$. Ellenkező esetben a vektorok *lineárisan összefüggők*. Ha a vektortér lineárisan független vektorait tartalmazó halmazok elemszáma korlátos, a legalsó n korlátot a vektortér *dimenziószám*ának nevezzük, (n dimenziós tér). A fenti példákból az első tér dimenziószáma n, a harmadik dimenziószáma pedig $n+1$. A második példában szereplő vektortér lineárisan független elemeket tartalmazó halmazainak elemszáma nem korlátos, az ilyen teret végtelen dimenziószámú (végtelen dimenziós) térnek nevezzük. A továbbiakban csak véges dimenziószámú terekről lesz szó.

Definíció: egy n dimenziós V_n vektortérben tetszőlegesen kiválasztott n darab $\mathbf{e}_i$ lineárisan független vektort tartalmazó $\{\mathbf{e}_i\}$ halmazt a vektortér *bázis*ának hívjuk.

A V_n vektortér tetszőleges $\mathbf{x}$ eleme egyértelműen kifejezhető a bázisvektorok lineáris kombinációjával:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i.$$

Ha a kifejezendő vektor a $\mathbf{O}$ nullvektor, akkor a báziselemek lineáris függetlenségéről mondottak értelmében a kifejtési együtthatók nullák. Ha az $\mathbf{x}$ vektor nem nullvektor, akkor használjuk fel azt a tényt, hogy a V_n vektortér tetszőleges $\mathbf{x}\,(\neq \mathbf{O})$ eleméből és egy adott $\{\mathbf{e}_i\}$ bázis elemeiből álló $\{\mathbf{x}, \mathbf{e}_i\}$ halmaz már lineárisan összefüggő vektorokat tartalmaz, és így létezik olyan $n+1$ darab α^i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ nemtriviális valós szám, amelyekkel

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \mathbf{e}_i + \alpha^0 \mathbf{x} = \mathbf{O}.$$

A bázisrendszer független elemeket tartalmaz, így α^0 nem lehet nulla. Az állítást az $\alpha^0 \mathbf{x}$ tag átvitele és α^0-lal való osztás után nyerjük. Az x^i együtthatók egyértelműen meghatározottak, hiszen feltételezve, hogy létezik egy tőlük eltérő y^i együttható rendszer, azonnal írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} y^i \mathbf{e}_i.$$

Egy oldalra rendezve:

$$\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{O}.$$

Mivel a bázisrendszer lineárisan független elemeket tartalmaz, a zárójelben álló együtthatók mind egyenlők nullával, azaz $y^i = x^i \; \forall \; i$ esetén.

Az x^i együtthatók az $\mathbf{x}$ vektor (adott bázisra vonatkozó) ún. *kontravariáns komponens*ei.

A továbbiakban alkalmazzuk azt a jelölésbeli egyszerűsítést (*Einstein-féle konvenció*), amely szerint, ha egy szorzatszerű kifejezésben egy alsó és felső index megegyezik, akkor arra az indexre nézve összegezni kell 1-től n-ig. Tehát

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

Ha új bázisra térünk át, az új $\mathbf{f}_j$ báziselemek kifejezhetők a régi $\mathbf{e}_i$ báziselemek lineáris kombinációjával és viszont:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i A^i_j \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_l B^l_k,$$

ahol B^l_k jelöli A^i_j inverzmátrixát ($A^l_j B^j_k = \delta^l_k$).

Itt és a továbbiakban a mátrixelemek felső és alsó indexe felel meg rendre a sor- és oszlopindexnek.

Új bázisra történő áttérés esetén egy $\mathbf{x}$ vektor x^i komponensei az új bázisra vonatkozóan új x'^j értékeket vesznek fel, amelyek kiszámíthatók a régi komponensek segítségével:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^i B^j_i \mathbf{f}_j = x'^j \mathbf{f}_j = x'^j A^i_j \mathbf{e}_i,$$

amiből azonnal leolvasható, hogy

$$x'^j = B^j_i x^i \quad \text{és} \quad x^i = A^i_j x'^j.$$

Tehát a kontravariáns komponensek a bázisvektorokkal "ellentétesen" változnak.

2. Duális tér

Jelölje $\overline{\omega}(\mathbf{x})$ a V_n vektortér $\mathbf{x}$ elemeinek egy $\overline{\omega} : V_n \mapsto R$ lineáris leképezését, azaz $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n$ és $\forall a, b \in R$ esetén álljon fenn, hogy

$$\overline{\omega}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\overline{\omega}(\mathbf{x}) + b\overline{\omega}(\mathbf{y}).$$

Ekkor $\overline{\omega}(\mathbf{x})$-et a V_n-en értelmezett *lineáris formá*nak hívjuk. Két lineáris forma $\overline{\omega}$ és $\overline{\pi}$ akkor egyenlő, ha $\forall \mathbf{x} \in V_n$-re $\overline{\omega}(\mathbf{x}) = \overline{\pi}(\mathbf{x})$.

Tekintsük ezután a V_n vektortéren értelmezett $\overline{\pi}, \overline{\omega}, \ldots$ lineáris formákat és definiáljuk közöttük az összeadás és a valós számmal való szorzás műveletét. A $\overline{\pi}$ és $\overline{\omega}$ lineáris forma $\overline{(\pi + \omega)}$ összege egy olyan lineáris forma, amelyre $\forall \mathbf{x} \in V_n$ esetén fennáll, hogy

$$\overline{(\pi + \omega)}(\mathbf{x}) = \overline{\pi}(\mathbf{x}) + \overline{\omega}(\mathbf{x}).$$

A $\overline{\pi}$ lineáris forma $c \in R$ számmal való szorzásának eredménye egy olyan $\overline{(c\pi)}$ lineáris forma, amelyre $\forall \mathbf{x} \in V_n$ esetén fennáll, hogy

$$\overline{(c\pi)}(\mathbf{x}) = c\overline{\pi}(\mathbf{x}),$$

valamint definiáljuk a $\overline{O}$ nulla lineáris formát úgy, hogy tetszőleges vektorra való hatása 0 legyen:

$$\overline{O}\,(\mathbf{x}) = 0.$$

A lineáris formák ezekkel a műveletekkel szintén vektorteret alkotnak, amiről könnyen meggyőződhetünk ha ellenőrizzük a vektorterekre vonatkozó axiómák teljesülését. Az így kapott vektorteret a V_n vektortér V_n^* *duális ter*ének nevezzük.

Az $\overline{\omega}$ lineáris forma hatását egy $\mathbf{x}$ vektorra ki tudjuk fejezni az $\mathbf{x}$ vektor x^i komponenseivel. A linearitás miatt ui.:

$$\overline{\omega}(\mathbf{x}) = \overline{\omega}(x^i\mathbf{e}_i) = x^i\overline{\omega}(\mathbf{e}_i) = x^i\omega_i,$$

ahol az $\omega_i = \overline{\omega}(\mathbf{e}_i)$ szerint definiált értékek már függetlenek az $\mathbf{x}$ vektortól.

A duális térben definiálunk n db $\overline{e}^i$ lineáris formát a következő módon:

$$\overline{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j.$$

Egy tetszőleges $\mathbf{x} = x^j\mathbf{e}_j$ vektorra alkalmazva az így bevezetett $\overline{e}^i$ lineáris formákat, azt kapjuk, hogy:

$$\overline{e}^i(\mathbf{x}) = \overline{e}^i(x^j\mathbf{e}_j) = x^j\overline{e}^i(\mathbf{e}_j) = x^j\delta^i_j = x^i.$$

Ennek megfelelően az $\overline{\omega}$ lineáris forma hatása egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra:

$$\overline{\omega}(\mathbf{x}) = x^i\omega_i = \omega_i\overline{e}^i(\mathbf{x})$$

alakban írható, ami definíció szerint azt jelenti, hogy:

$$\overline{\omega} = \omega_i\overline{e}^i.$$

Ezek szerint tetszőleges $\overline{\omega}$ lináris forma kifejezhető az $\overline{e}^i$ lineáris formák ω_i együtthatókkal képezett lineáris kombinációjával. Az $\overline{e}^i$ lineáris formák lineárisan függetlenek is. Felírhatjuk ui. valamilyen α_i együtthatókkal vett $\alpha_i\overline{e}^i$ lineáris kombinációjukat és megvizsgálhatjuk, hogy milyen feltétellel lehet ez nulla lineáris forma. Hasson ez a lineáris forma egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra:

$$\alpha_i\overline{e}^i(\mathbf{x}) = \alpha_i\overline{e}^i\left(x^j\mathbf{e}_j\right) = \alpha_i x^j\overline{e}^i(\mathbf{e}_j) = \alpha_i x^j\delta^i_j = \alpha_i x^i.$$

Mivel az n db x^i együttható tetszőlegesen választható, az összeg csak akkor lehet mindig nulla, ha az α_i együtthatók mind nullák. Így V_n^* is n dimenziós és az $\{\overline{e}^i\}$ lineáris formák az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázis ún. *duális bázis*át alkotják, amelyre nézve az ω_i együtthatók az $\overline{\omega}$ lineáris forma komponensei.

Térjünk át most a V_n térben egy másik $\{\mathbf{f}_j\}$ bázisra és a megfelelő duális bázis legyen $\{\overline{f}^j\}$, amire fennáll, hogy $\overline{f}^i(\mathbf{f}_j) = \delta^i_j$. A szabály szerint:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i A^i_j \ \text{ és } \ \mathbf{e}_i = \mathbf{f}_j B^j_i.$$

Vizsgáljuk meg az $\overline{f}^j$ hatását egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra:

$$\overline{f}^j(\mathbf{x}) = \overline{f}^j(x^i\mathbf{e}_i) = \overline{f}^j(x^i\mathbf{f}_m B^m_i) = B^m_i x^i\overline{f}^j(\mathbf{f}_m) = B^m_i x^i\delta^j_m = B^j_i x^i = B^j_i\overline{e}^i(\mathbf{x}).$$

Tehát

$$\overline{f}^j = B^j_i\overline{e}^i,$$

amiből egyben az is következik, hogy

$$\overline{e}^i = A^i_j \overline{f}^j.$$

Így a duális bázis a V_n vektortér bázistranszformációjának inverzével transzformálódik, azaz a kontravariáns vektorkomponensek transzformációs szabálya szerint.

Az $\overline{\omega}$ lineáris forma ω_i komponenseire pedig írhatjuk, hogy

$$\overline{\omega} = \omega_i \overline{e}^i = \omega_i A^i_j \overline{f}^j,$$

amiből az új ω'_j komponensek

$$\omega'_j = \omega_i A^i_j.$$

3. Euklideszi vektorterek

Definiáljuk az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ *skaláris szorzat*át, ami alatt egy olyan $P : V_n \times V_n \mapsto R$ leképezést értünk, amelyre $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V_n$ és $\forall a \in R$ esetén fennáll, hogy:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
2. $\mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y}) = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
3. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
4. Ha $\forall \mathbf{x} \in V_n$ esetén $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, akkor $\mathbf{y} = \mathbf{O}$

Az olyan n dimenziós vektorteret, amelyben a fenti tulajdonságokkal bíró skaláris szorzatot bevezettük E_n *euklideszi tér*nek nevezzük.

Adott $\{\mathbf{e}_i\}$ bázison legyen

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \text{ és } \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j.$$

Ekkor

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i y^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = x^i y^j g_{ij},$$

ahol a bázisvektorok szorzatának jelölésére bevezettük, hogy

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j.$$

A skaláris szorzat az 1. pont szerint kommutatív, így a g_{ij} ún. *fundamentális mátrix* szimmetrikus.

Vizsgáljuk meg a 4. pont következményét. Ha $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\ \forall \mathbf{x}$-re, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ választás esetén is, ahol k értéke 1 és n közötti tetszőleges értéket vesz fel, fennáll, hogy:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{y} = \mathbf{e}_k \cdot y^j \mathbf{e}_j = g_{kj} y^j = 0.$$

A 4. pont értelmében ebből következik, hogy $\mathbf{y} = \mathbf{O}$, azaz $\forall j$-re $y^j = 0$. A lineáris egyenletrendszerekről tudjuk, hogy ha egy homogén egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, az egyenletrendszer mátrixának g determinánsa nem lehet nulla:

$$g \equiv \det g_{ij} \neq 0$$

és a skalárszorzatot adott bázison előállító bilineáris forma nem-degenerált.

Ha két vektor skaláris szorzata nulla, azt mondjuk, hogy a két vektor *ortogonális*. Definiáljuk egy vektor *normáját*:

$$N\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^2 = g_{ij} x^i x^j .$$

A norma lehet pozitív, negatív vagy nulla is. Ha a norma mindig pozitív és csak a null-vektorra nulla, azt mondjuk, hogy a vektortér *valódi euklideszi tér*. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a normát definiáló kvadratikus forma pozitív definit legyen. Ismert ellenpélda a speciális relativitáselméletben használt Minkowski-tér, ami ún. *pszeudo-euklideszi tér*. Vannak benne pozitív normájú (időszerű), negatív normájú (térszerű) és nulla normájú (fényszerű) vektorok is. Az elemi geometria három dimenziós tere ugyanakkor valódi euklideszi tér.

Érdekes tulajdonsága az olyan normának, amelyiket skaláris szorzattal definiálunk, hogy a norma megadása már meghatározza a skaláris szorzatot. A tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektor skaláris szorzatát ui. elő tudjuk állítani a skaláris szorzat tulajdonságai miatt az alábbi formában:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{4} \left[(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \right] = \frac{1}{4} \left[N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] .$$

Valódi euklideszi térben a norma nem negatív és így definiálhatjuk egy vektor hosszát vagy *abszolút érték*ét:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(N\mathbf{x})}.$$

Két tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektor skalárszorzatának abszolút értéke és hossza között fennáll a következő ún. *Schwarz-féle egyenlőtlenség*:

$$|\mathbf{x}| \, |\mathbf{y}| \geq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| .$$

Tekintsük ugyanis a következő $\mathbf{v}$ vektort:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y}^2} \mathbf{y},$$

ahol a nevezőben szereplő $\mathbf{y}$ vektor nem nullvektor és így a normája nem nulla. Képezzük a $\mathbf{v}$ vektor normáját, amiről tudjuk, hogy nem negatív:

$$\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y}^2} \mathbf{y} \right)^2 \geq 0.$$

Végezzük el a négyzetreemelést és használjuk ki a skaláris szorzat kommutativitását és disztributivitását:

$$\mathbf{x}^2 - 2 \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{\mathbf{y}^2} + \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{\mathbf{y}^4} \mathbf{y}^2 \geq 0.$$

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{y}^2 \geq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 ,$$

amiből gyökvonással kapjuk a keresett egyenlőtlenséget. Ha $\mathbf{y} = \mathbf{O}$, az egyenlőség áll fenn.

Felírva két vektor összegének normáját és felhasználva a Schwarz-féle egyenlőtlenséget adódik, hogy

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 .$$

Gyököt vonva kapjuk az ún. *háromszög-egyenlőtlenség*et:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| .$$

A Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján definiálhatjuk az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok által bezárt φ szöget is. Mivel

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| ,$$

azaz

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \leq 1,$$

létezik olyan valós $\varphi \in [0, \pi]$ szög, amelyre

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|},$$

amivel a skaláris szorzat $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\varphi$ alakban írható fel. Ha két vektor ortogonális (merőleges) egymásra, a skaláris szorzatuk nulla és $\varphi = \pi/2$.

Egy euklideszi vektortér $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ vektorai *ortogonális rendszer*t alkotnak, ha tetszőleges két elemük ortogonális egymásra:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}\beta_{(j)},$$

ahol $\delta_{ij} = 0$ ha $i \neq j$ és $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$, valamint $\beta_{(j)} \neq 0$. A zárójelbe tett index szerint nem kell összegezni. Ha speciálisan $\beta_{(j)} = 1$, a rendszert *ortonormált* (ortogonális és normált) rendszernek hívjuk.

Vegyük az ortogonális rendszer vektorainak lineáris kombinációját valamilyen α^i együtthatókkal és tételezzük fel, hogy nullvektort kapunk:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha^i \mathbf{v}_i = \mathbf{O}.$$

Szorozzuk be az egyenletet skaláriasan $\mathbf{v}_j$-vel ($j = 1, 2, \ldots, r$). Az eredmény:

$$\alpha^i \delta_{ij}\beta_{(j)} = \alpha^j \beta_{(j)} = 0.$$

Mivel a β-k nem nullák, következik, hogy egy ortogonális rendszer elemei mindig lineárisan függetlenek és így $r = n$ választás esetén ortonormált bázist képeznek. (Látjuk, hogy $r > n$ nem lehetséges.)

Belátjuk, hogy valódi euklideszi térben mindig lehet ortonormált bázist találni. Az E_n térben ugyanis definíció szerint mindig létezik n db független $\mathbf{x}_i$ elemből álló $\{\mathbf{x}_i\}$ bázisrendszer. Az $\mathbf{x}_i$ vektorokból az ún. *Schmidt-féle ortogonalizálás*i eljárás segítségével konstruáljuk meg a következő $\mathbf{y}_i$ vektorokat, ahol a bevezetett λ_{ij} paramétereket úgy fogjuk megválasztani, hogy az $\mathbf{y}_i$ vektorok ortogonális rendszert alkossanak:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{y}_2 &= \lambda_{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \\
\mathbf{y}_3 &= \lambda_{31}\mathbf{y}_1 + \lambda_{32}\mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3 \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_n &= \lambda_{n1}\mathbf{y}_1 + \lambda_{n2}\mathbf{y}_2 + \cdots + \lambda_{n(n-1)}\mathbf{y}_{(n-1)} + \mathbf{x}_n
\end{aligned}$$

Az $\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2 = 0$ ortogonalitási feltételből következik, hogy

$$\lambda_{21}\mathbf{y}_1^2 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1 = 0, \text{ ahol } \mathbf{y}_1^2 \neq 0.$$

Ezzel meghatározhatjuk λ_{21} értékét. A következő lépésben kihasználjuk az

$$\mathbf{y}_3 \cdot \mathbf{y}_1 = 0 \text{ és } \mathbf{y}_3 \cdot \mathbf{y}_2 = 0,$$

ortogonalitási feltételeket. Ezekből az egyenletekből adódik, hogy

$$\lambda_{31}\mathbf{y}_1^2 + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_1 = 0, \text{ ahol } \mathbf{y}_1^2 \neq 0 \text{ és}$$

$$\lambda_{32}\mathbf{y}_2^2 + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{y}_2 = 0, \text{ ahol } \mathbf{y}_2^2 \neq 0,$$

amiből λ_{21} és λ_{32} meghatározható. Látható, hogy az eljárás folytatható és az így megkonstruált $\{\mathbf{y}_i\}$ rendszer valóban ortogonális (és ezért lineárisan független is). A következő lépésben állítsuk elő az $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{|\mathbf{y}_i|}$ vektorokat, amelyek már nyilvánvalóan normáltak is. Ortonormált bázisban $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, így pl. $\mathbf{x}$ vektor normája:

$$N\mathbf{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2,$$

ami megfelel az elemi vektorszámításban, a Descartes-rendszer használata esetén megszokott alaknak.

4. Euklideszi tér duális tere

Az E_n euklideszi térben bevezetett skaláris szorzat második tényezőjében lineáris, így természetes módon az első tényezőként szereplő ω vektorhoz hozzá rendelhetünk egy lineáris formát az E_n^* duális térből. Legyen u.i. $\overline{\omega} \in E_n^*$ olyan, hogy $\forall \mathbf{x} \in E_n$ esetére:

$$\overline{\omega}(\mathbf{x}) = \omega \cdot \mathbf{x},$$

ami nyilvánvalóan lineáris forma $\mathbf{x}$-re nézve.

A $\overline{\omega}$ lineáris forma komponensei a duális bázisban:

$$\omega_i = \overline{\omega}(\mathbf{e}_i) = \omega \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \omega^j \mathbf{e}_j = g_{ij}\omega^j,$$

ahol ω^j jelöli az ω vektor kontravariáns komponenseit. Mivel a g_{ij} mátrix invertálható, a megfeleltetés az ω_i és ω^j komponensek között kölcsönösen egyértelmű. Ez azt jelenti, hogy az ω vektorok és az $\overline{\omega}$ lineáris formák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltethetőség áll fenn, ezért az E_n és az E_n^* tereket és vektoraikat azonosnak tekinthetjük. Az $\omega_i = \omega \cdot \mathbf{e}_i$ komponenseket az ω vektor ún. *kovariáns komponens*einek hívjuk.

Két vektor skaláris szorzata ebből:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^i y^j g_{ij} = x_j y^j = x^i y_i,$$

ahol $x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j$ és $y_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i$ az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok kovariáns komponensei.

Egy vektor normája pl. az

$$N\mathbf{x} = x^i x^j g_{ij} = x^i x_i$$

alakban is felírható.

Jelöljük a g_{ij} mátrix inverzét g^{ij}-vel, azaz $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$, amivel írhatjuk, hogy

$$x_j g^{jk} = x^i g_{ij} g^{jk} = x^i \delta^k_i = x^k.$$

Tehát a g_{ij} mátrix "alsó" és "felső" indexes alakjával a vektorok kontravariáns és kovariáns komponensei ún. *index fel-* és *lehúzás*sal állíthatók elő egymásból.

Speciálisan, keressük meg az $\{\overline{e}^i\}$ duális bázis elemeihez rendelt $\mathbf{e}^i$ vektorokat. Az $\overline{e}^i$ lineáris forma j-edik komponense $e^i_j = \overline{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$, ami a fenti szabály szerint egyben a keresett vektor j-edik kovariáns komponensével egyenlő. A megfelelő kontravariáns komponensek ebből indexfelhúzással adódnak:

$$e^{ik} = \delta^i_j g^{jk} = g^{ik}, \text{ amiből}$$

$$\mathbf{e}^i = g^{ik}\mathbf{e}_k, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{e}_k = g_{ki}\mathbf{e}^i.$$

Mivel $g \neq 0$, az $\mathbf{e}^i$ vektorok lineárisan függetlenek és így bázist alkotnak E_n-ben.

A megfeleltetés miatt szokás egyszerűen ezt is duális bázisnak nevezni. Mivel az utóbbi összefüggések formailag szintén az indexek fel- és lehúzásának szabályát követik, szokás az $\{\mathbf{e}^i\}$ bázist kovariáns és az eredeti $\{\mathbf{e}_i\}$ bázist kontravariáns bázisnak nevezni. A kovariáns és kontravariáns báziselemek skaláris szorzata pedig

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j.$$

Egy tetszőleges $\mathbf{x} \in E_n$ vektor akár a kovariáns, akár a kontravariáns bázis segítségével előállítható:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^i g_{im} \mathbf{e}^m = x_i \mathbf{e}^i,$$

ahol $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$ a korábban már definiált kovariáns komponens. A kontravariáns komponens pedig $x^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i$ alakban állítható elő.

Bázistranszformáció esetén a kovariáns komponensek úgy transzformálódnak, mint a duális tér megfelelő elemének a komponensei. Tehát az új x'_j komponensek

$$x'_j = x_i A^i_j, \quad (\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i A^i_j)$$

szerint számíthatók ki a régi x_i komponensekből, ami indokolja a kovariáns jelzőt.

Érdemes felírni a g_{ij} fundamentális mátrix transzformációs képletét is:

$$g'_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_k A^k_i \cdot \mathbf{e}_m A^m_j = g_{km} A^k_i A^m_j.$$

Ez természetesen összhangban van azzal, hogy a skaláris szorzat definíció szerint nem függ a bázisválasztástól:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x'^i y'^j g'_{ij} = B^i_k x^k B^j_m y^m g_{pq} A^p_i A^q_j = x^k y^m \delta^p_k \delta^q_m g_{pq} = x^k y^m g_{km}.$$

Speciálisan ortonormált bázisban $g_{ij} = \delta_{ij}$. Ekkor a kovariáns és kontravariáns báziselemek egybeesnek, és a kovariáns és kontravariáns komponensek egyenlők egymással, ami megengedi, hogy ne különböztessük meg az alsó és felső indexes írásmódot.

Tekintsünk egy ortonormált bázisból ortonormált bázisba történő ún. *ortogonális transzformációt*:

$$x'^j = B^j_i x^i \quad \text{és} \quad x'_j = x_i A^i_j.$$

Ha most az első egyenletben kihasználjuk, hogy a felső és alsó indexes komponensek egyenlők, írhatjuk

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} B^j_i x_i.$$

Ha a B mátrix transzponáltját $\widetilde{B}$-mal jelöljük ($\widetilde{B}^i_j = B^j_i$), az egyenlet a következő alakot nyeri:

$$x'_j = \widetilde{B}^i_j x_i,$$

amiből leolvasható, hogy

$$\widetilde{B}^i_j = A^i_j, \quad \text{azaz} \quad \widetilde{B}^i_j B^j_k = \delta^i_k, \quad (\widetilde{B} = B^{-1}).$$

Az ilyen mátrixot *ortogonális mátrix*nak hívjuk.

5. Affin tér, euklideszi ponttér

Tekintsünk egy ε pontsokaságot, amelyben az elemi geometriában definiált helyvektorok tulajdonságait alapul véve tételezzük fel, hogy $\forall (M, N) \in \varepsilon \times \varepsilon$ pontpárnak megfeleltethetünk egy n dimenziós V_n vektortérbeli $\mathbf{n} = \overrightarrow{MN}$ vektort úgy, hogy

1. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$
2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$ $\forall P \in \varepsilon$ esetén
3. $\forall O \in \varepsilon$ esetén $\forall \mathbf{m} \in V_n$ vektorhoz $\exists! M \in \varepsilon$ úgy, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{m}$

A fenti feltételek teljesülése esetén azt mondjuk, hogy az ε sokaság egy n dimenziós ε_n *affin ponttér.* A harmadik feltétel szerint, ha rögzítettünk egy $O \in \varepsilon_n$ pontot, akkor tetszőleges $\mathbf{m} \in V_n$ vektor egyértelműen meghatározza az $M \in \varepsilon_n$ pontot úgy, hogy $\overrightarrow{OM} = \mathbf{m}$.

Ha az ε_n affin térben rögzítünk egy O pontot és az ε_n-hez rendelt V_n térben megadunk egy $\{\mathbf{e}_i\}$ bázist, akkor az ε_n térben egy $(O, \mathbf{e}_i)$ *vonatkoztatási rendszer*t definiáltunk. Az $\overrightarrow{OM}$ vektor x^i komponenseit az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisban az M pont *koordinátá*inak hívjuk.

Legyen adva két pont M és N, amelyek koordinátái rendre x^i és y^i. Az $\overrightarrow{MN}$ vektor az első és második feltételek szerint előállítható a következő alakban

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (y^i - x^i)\mathbf{e}_i$$

Tehát az $\overrightarrow{MN}$ vektor komponensei az adott vonatkoztatási rendszerben $(y^i - x^i)$-vel egyenlők.

Térjünk most át az $(O, \mathbf{e}_i)$ vonatkoztatási rendszerről egy új, $(P, \mathbf{f}_j)$ vonatkoztatási rendszerre. Az áttérésnél meg kell adnunk az $\overrightarrow{OP}$ vektort és az új $\mathbf{f}_j$ bázisvektorokat a régi $\mathbf{e}_i$ bázisvektorokkal kifejezve:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha^i \mathbf{e}_i, \text{ és } \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i A^i_j$$

Egy M pont koordinátái az $(O, \mathbf{e}_i)$ rendszerben legyenek x^i-k, azaz

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i.$$

Ez a második pont szerint felírható $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ alakban, amiből

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = x^i \mathbf{e}_i - \alpha^i \mathbf{e}_i = (x^i - \alpha^i) B^j_i \mathbf{f}_j = x'^j \mathbf{f}_j,$$

ahol x'^j jelöli az M pont új vonatkoztatási rendszerbeli koordinátáit:

$$x'^j = (x^i - \alpha^i) B^j_i.$$

Ha az ε_n affin térhez rendelt V_n vektortér E_n euklideszi tér, az affin teret E_n *euklideszi ponttér*nek nevezzük. Ebben a térben kézenfekvő a két M és N pont közötti *távolság*ot a megfelelő $\overrightarrow{MN}$ vektor normájának gyökével definiálni. Ha az M és N pont koordinátái az $(O, \mathbf{e}_i)$ vonatkoztatási rendszerben x^i és y^i, a norma:

$$N\left(\overrightarrow{MN}\right) = \left(\overrightarrow{MN}\right)^2 = g_{ij}\left(y^i - x^i\right)\left(y^j - x^j\right).$$

Egyszerű behelyettesítéssel látható, amit a szemlélet alapján is várunk, hogy ez a mennyiség invariáns a fenti koordináta-transzformációval szemben és így valóban alkalmas a távolság definiálására:

$$\begin{aligned} g'_{ij}\left(y'^i - x'^i\right)\left(y'^j - x'^j\right) &= g_{pq} A^p_i A^q_j \left(x^r - \alpha^r - y^r + \alpha^r\right) B^i_r \left(x^s - \alpha^s - y^s + \alpha^s\right) B^j_s \\ &= g_{rs}\left(x^r - y^r\right)\left(x^s - y^s\right). \end{aligned}$$

Ennek alapján két olyan pont ds^2 távolságnégyzete, amelyeknek koordinátái között infinitezimális dx^i a különbség

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Láttuk, hogy valódi euklideszi térben mindig lehet ortonormált bázist találni. Az olyan $(O, \mathbf{e}_i)$ vonatkoztatási rendszert, amelyben a bázis ortonormált, $g^D_{ij} = \delta_{ij}$, Descartes-rendszernek hívjuk. Ilyen rendszerekben két pont távolságnégyzete:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y^i - x^i\right)^2 \quad \text{vagy} \quad ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

6. Tenzorok

Legyen V_n egy n dimenziós és W_p egy p dimenziós vektortér és képezzük az $\mathbf{x} \in V_n$ és $\mathbf{y} \in W_p$ vektorokból alkotott rendezett $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ párokat (jelölésben: $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$). Ezek az $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ párok egy vektorteret fognak *kifeszít*eni, (jelölésben: $V_n \otimes W_p$) azaz lineáris kombinációik előállítják az egész teret, ha definiáljuk közöttük az összeadás és valós számmal való szorzás műveletét úgy, hogy teljesüljenek az alábbi tulajdonságok:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_n$ és $\forall \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W_p$ esetén

   $\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_1 + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}_2$

   $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y} + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}$

2. $\forall a \in R$ esetén

   $a(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes a\mathbf{y} = a\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$

3. Ha $\{\mathbf{e}_i\}$ és $\{\mathbf{f}_j\}$ tetszőleges bázis V_n-ben ill. W_p-ben, az $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j = \varepsilon_{ij}$ elemek alkossanak bázist a $V_n \otimes W_p$ térben

Az $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ alakú elemeket az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ *vektorok tenzorszorzatá*nak, a $V_n \otimes W_p$ teret pedig a V_n és W_p tér *tenzorszorzat-teré*nek nevezzük. A $V_n \otimes W_p$ tér elemeit *tenzor*oknak hívjuk.

Tekintsünk ezek után egy $\mathbf{x} \in V_n$ és egy $\mathbf{y} \in W_p$ vektort. Definíció szerint a megfelelő komponensek segítségével írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad \text{és} \quad \mathbf{y} = y^j \mathbf{f}_j.$$

A két vektor tenzorszorzata a fenti tulajdonságok szerint:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i \mathbf{e}_i \otimes y^j \mathbf{f}_j = x^i y^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j = x^i y^j \varepsilon_{ij},$$

amiből következik, hogy a két vektor tenzorszorzatának komponensei az ε_{ij} bázisra nézve egyenlők $x^i y^j$-vel.

A tenzorszorzat értelmezését kiterjeszthetjük kettőnél több vektortérre és azok megfelelő elemeire, azzal a megállapodással, hogy fennáll az asszociativitás tulajdonsága, ami lehetővé teszi a zárójelek elhagyását:

$$\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z}$$

Az $\mathbf{x} \in V_n$, $\mathbf{y} \in W_p$ és $\mathbf{z} \in U_r$ vektorok tenzorszorzatai kifeszítik a $V_n \otimes W_p \otimes U_r$ vektorteret.

Nyilvánvaló, hogy hasonló módon tetszőleges számú vektorteret "összeszorozhatunk". A vektorterek $V_n \otimes W_p \otimes U_r \otimes \cdots$ tenzorszorzatai által kifeszített vektortér elemeit is *tenzor*oknak hívjuk.

Legyen V_n egy n dimenziós vektortér és konstruáljuk meg ennek a térnek önmagával vett p-szeres tenzorszorzatát (*tenzorhatvány*át):

$$V_n^{(p)} = V_n \otimes V_n \otimes \cdots \otimes V_n.$$

A V_n térben adott $\{\mathbf{e}_i\}$ bázis a $V_n^{(p)}$ térben természetes módon generál egy bázist:

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_p}.$$

Ha a V_n térben adott p darab $\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{(p)}$ vektor, amelyek komponensei az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisra vonatkoztatva rendre $x^{i_1}_{(1)}, x^{i_2}_{(2)}, \ldots, x^{i_p}_{(p)}$, akkor ezeknek a vektoroknak a tenzorszorzata eleme lesz a $V_n^{(p)}$ térnek. Komponensekkel kifejezve:

$$\mathbf{x}_{(1)} \otimes \mathbf{x}_{(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_{(p)} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_p}_{(p)} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Hasonló módon tekinthetjük a V_n tér V_n^* duális terét, és annak is elkészíthetjük a q-szoros $V_n^{*(q)}$tenzorhatványát. A két tér tenzorszorzata $V_n^{(p)} \otimes V_n^{*(q)}$ lesz, ami egy n^{p+q} dimenziós tér. A V_n és V_n^* tér tenzorhatványaiból, a fenti módon definiált tér elemeit a V_n tér (p, q) *rendű affin tenzor*ainak nevezzük, amelyeket *p-szeresen kontravariáns*nak és *q-szorosan kovariáns*nak hívunk. Az indexek használatára a vektoroknál már bevezetett jelölésbeli konvenciót általánosítva írhatjuk a bázisra:

$$\varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \overline{e}^{j_1} \otimes \overline{e}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \overline{e}^{j_q}.$$

Egy $\mathbf{T}$ tenzor komponenseivel kifejezve

$$\mathbf{T} = t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

ahol a t komponens alsó és felső indexeit rendre *kovariáns* és *kontravariáns index*eknek nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hogyan transzformálódnak a tenzor komponensei, ha az $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisról új $\{\mathbf{f}_j\}$ bázisra térünk át. Ekkor természetesen a $\{\overline{e}^i\}$ duális bázisról az $\{\mathbf{f}_j\}$-hez rendelt $\{\overline{f}^i\}$ duális bázisra is áttérünk:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i A^i_j \quad \text{és} \quad \overline{f}^j = B^j_i \overline{e}^i,$$

valamint

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i B^i_j \quad \text{és} \quad \overline{e}^j = A^j_i \overline{f}^i,$$

ahol $B^i_j A^j_k = \delta^i_k$.

Ez a transzformáció az

$$\varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \overline{e}^{j_1} \otimes \overline{e}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \overline{e}^{j_q}$$

bázisvektort a

$$\begin{aligned}\varphi^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} &= \mathbf{f}_{i_1} \otimes \mathbf{f}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{i_p} \otimes \overline{f}^{j_1} \otimes \overline{f}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \overline{f}^{j_q} \\ &= A^{k_1}_{i_1} \mathbf{e}_{k_1} \otimes A^{k_2}_{i_2} \mathbf{e}_{k_2} \otimes \cdots \otimes A^{k_p}_{i_p} \mathbf{e}_{k_p} \otimes B^{j_1}_{l_1} \overline{e}^{l_1} \otimes B^{j_2}_{l_2} \overline{e}^{l_2} \otimes \cdots \otimes B^{j_q}_{l_q} \overline{e}^{l_q}\end{aligned}$$

bázisvektorba transzformálja. A megfelelő inverz transzformáció szerint pedig a régi bázisvektorok az újak szerint kifejtve:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} &= \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \overline{e}^{j_1} \otimes \overline{e}^{j_2} \otimes \cdots \otimes \overline{e}^{j_q} \\ &= \mathbf{f}_{k_1} B^{k_1}_{i_1} \otimes \mathbf{f}_{k_2} B^{k_2}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{k_p} B^{k_p}_{i_p} \otimes A^{j_1}_{l_1} \overline{f}^{l_1} \otimes A^{j_2}_{l_2} \overline{f}^{l_2} \otimes \cdots \otimes A^{j_q}_{l_q} \overline{f}^{l_q}.\end{aligned}$$

A $\mathbf{T}$ tenzor $\varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ bázison történt kifejtésébe helyettesítsük be az új bázisvektorokat:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \mathbf{f}_{k_1} B^{k_1}_{i_1} \otimes \mathbf{f}_{k_2} B^{k_2}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{k_p} B^{k_p}_{i_p} \otimes A^{j_1}_{l_1} \overline{f}^{l_1} \otimes A^{j_2}_{l_2} \overline{f}^{l_2} \otimes \cdots \otimes A^{j_q}_{l_q} \overline{f}^{l_q} \\ &= t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} B^{k_1}_{i_1} B^{k_2}_{i_2} \cdots B^{k_p}_{i_p} A^{j_1}_{l_1} A^{j_2}_{l_2} \cdots A^{j_q}_{l_q} \varphi^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{k_1 k_2 \ldots k_p}.\end{aligned}$$

Az új bázisra vonatkozó komponensek azonnal leolvashatók:

$$t'^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{l_1 l_2 \ldots l_q} = t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} B^{k_1}_{i_1} B^{k_2}_{i_2} \cdots B^{k_p}_{i_p} A^{j_1}_{l_1} A^{j_2}_{l_2} \cdots A^{j_q}_{l_q}.$$

A tenzorkomponensek tehát úgy transzformálódnak, mint a megfelelő kontravariáns és kovariáns vektorkomponensek szorzatai. Fordítva: ha egy adott bázisra vonatkozó komponensekből alkotott mátrix a fenti szabály szerint transzformálódik, az elégséges feltétele is annak, hogy a mátrixelemek egy tenzor komponensei legyenek.

Ebben a megközelítésben a V_n vagy V_n^* tér vektorai elsőrendű kontravariáns és kovariáns tenzorok (vektorok), míg az invariáns skalárok nulladrendű tenzorok.

Két egyforma rendű tenzor összege és egy tenzor számmal való szorzata már definiálva van, hiszen a tenzorokat is vektortér (vektorterek tenzorszorzata) vektoraiként definiáltuk. Ennek megfelelően ahhoz, hogy az eredménytenzor komponenseit megkapjuk a megfelelő komponenseket kell összeadni ill. számmal szorozni.

Tenzorokkal azonban más műveleteket is végezhetünk, azaz adott tenzorokból új tenzorokat állíthatunk elő. Az egyik művelet két tenzor *tenzori szorzás*a, ami a vektorok tenzori szorzásának természetes általánosítása. Ennek a műveletnek eredményeként egy (p, q) és egy (x, y) rendű tenzorból egy $((p + x), (q + y))$ rendű tenzor keletkezik.

Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egy (p, q) és egy (x, y) rendű tenzor, amelyeknek komponensei rendre:

$$u^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \quad \text{és} \quad v^{k_1 k_2 \ldots k_x}_{l_1 l_2 \ldots l_y}.$$

A $\mathbf{T} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ szorzattenzor komponensei:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_x}_{j_1 j_2 \dots j_q l_1 l_2 \dots l_y} = u^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} v^{k_1 k_2 \dots k_x}_{l_1 l_2 \dots l_y}.$$

Az, hogy az így keletkezett komponensek egy tenzor komponensei, a transzformációs tulajdonságokról mondottak alapján nyilvánvaló.

Egy másik fontos művelet az ún. *indexegybeejtés* vagy *kontrakció* művelete, aminek eredményeként egy tenzor kovariáns és kontravariáns rendje eggyel csökken. Tehát ha adott egy tenzor, amelynek van legalább egy kontravariáns és egy kovariáns indexe, mint pl. a $\mathbf{t}$ harmadrendű ($(2,1)$-rendű) tenzornak, amelynek komponensei t^{kl}_m, elkészíthetjük a t^{km}_m komponenseket. Az így kapott komponensek, amelyeknek csak egy szabad indexe van (az m összegző index), egy $(1,0)$ rendű tenzor komponensei lesznek (vektor), hiszen a transzformációs szabály szerint

$$t'^{ab}_b = B^a_c B^b_d t^{cd}_e A^e_b = B^a_c \delta^e_d t^{cd}_e = B^a_c t^{cd}_d.$$

Speciálisan, egy kontravariáns $\mathbf{u}$ és egy kovariáns $\mathbf{v}$ vektor tenzorszorzatán elvégezve az indexegybeejtés műveletét

$$u^m v_m = A^m_i u'^i B^j_m v'_j = \delta^j_i u'^i v'_j = u'^j v'_j,$$

invariáns skalár mennyiséget kapunk.

Az indexegybeejtés művelete a tenzorjelleg vizsgálatának, azaz a transzformációs tulajdonságok vizsgálatának egy általánosabb, sokszor jól használható lehetőségét is nyújtja. Fennáll ui. a következő tétel:

Egy tetszőleges p darab felső és q darab alsó indexszel megadott mátrix akkor és csak akkor alkotja egy (p,q) rendű tenzor megfelelő komponenseit, ha tetszőleges (x,y) rendű tenzorral történő indexegybeejtés után $((p+x-i),(q+y-i))$ rendű tenzort kapunk, ahol $i \geq 0$ darab indexpárt ejtettünk egybe.

Például a fent említett t^{kl}_m mátrix esetén elég megvizsgálni, hogy a tetszőleges v^m vektorkomponensekkel alkotott $t^{kl}_m v^m$ mátrix $(2,0)$ rendű tenzor komponenseit alkotják-e?

Hasonló módon egy u^p szám n-es akkor és csak akkor alkotja egy kontravariáns vektor komponenseit, ha tetszőleges $\mathbf{v}$ kovariáns vektor esetén az $u^p v_p$ kifejezés invariáns skalár, vagy pl. az $u^p v_q$ mátrix egy $(1,1)$ rendű tenzor komponenseit alkotják.

A bizonyítást a fenti példa esetére mutatjuk meg, aminek alapján az általánosítás kézenfekvő.

Mivel a v^m mátrix $(1,0)$ rendű, a $t^{kl}_m v^m$ mátrix pedig $(2,0)$ rendű tenzor komponenseiként transzformálódik, írhatjuk a transzformált mátrixokra, hogy

$$\begin{aligned} t'^{ab}_c v'^c &= B^a_k B^b_l (t^{kl}_m v^m) \quad \text{valamint} \\ v'^c &= B^c_m v^m. \end{aligned}$$

Behelyettesítve v'^c-t az első egyenletbe, nullára redukálva és kiemelve v^m-et kapjuk

$$(B^c_m t'^{ab}_c - B^a_k B^b_l t^{kl}_m) v^m = 0.$$

Mivel v^m tetszőlegesen választható, a zárójelben lévő mátrix nullmátrix kell legyen, amit megint két oldalra rendezhetünk

$$B^c_m t'^{ab}_c = B^a_k B^b_l t^{kl}_m.$$

Az egyenletet A^m_j-vel beszorozva nyerjük a bal oldalra, hogy:

$$A^m_j B^c_m t'^{ab}_c = \delta^c_j t'^{ab}_c = t'^{ab}_j.$$

A jobb oldalon szereplő tag pedig $A^m_j B^a_k B^b_l t^{kl}_m$. A két oldal egyenlősége éppen a keresett transzformációs szabályt adja:

$$t'^{ab}_j = A^m_j B^a_k B^b_l t^{kl}_m.$$

Érdemes külön megemlíteni az $(1,1)$ rendű tenzorokat, amelyek az alábbiak szerint éppen a V_n tér lineáris operátorainak feleltethetők meg. Tekintsünk ui. egy $\mathbf{L}$ lineáris operátort, amellyel tetszőleges $\mathbf{v}$ vektorhoz egy $\mathbf{u}$ vektort rendelünk hozzá lineáris módon

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}(\mathbf{v}).$$

Fejtsük ki az egyenletben szereplő vektorokat adott $\{\mathbf{e}_i\}$ bázison és használjuk ki az operátor lineáris voltát

$$u^i \mathbf{e}_i = \mathbf{L}(v^j \mathbf{e}_j) = v^j \mathbf{L}(\mathbf{e}_j) = v^j L^i_j \mathbf{e}_i,$$

ahol az n darab $\mathbf{L}(\mathbf{e}_j)$ vektor $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisra vonatkozó komponenseinek jelölésére bevezettük az L^i_j mátrixot. Összehasonlítva $\mathbf{e}_i$ együtthatóit, $u^i = v^j L^i_j$ kell legyen. Mivel u^i és v^j tetszőleges kontravariáns vektorok komponensei, az L^i_j mátrix $(1,1)$ rendű tenzor komponensmátrixa kell legyen. Tehát

$$\mathbf{L} = L^i_j \mathbf{e}_i \otimes \overline{e}^j.$$

7. Euklideszi tenzorok

A fizikában alkalmazott vektorterek sokszor euklideszi terek, ezért érdemes megvizsgálni a skalárszorzat bevezetésének következményeit. E_n euklideszi tér esetén a duális E^*_n tér kovariáns vektorait azonosítottuk E_n tér kontravariáns vektoraival és a vektorok kontravariáns és kovariáns komponensei között a g_{ij} fundamentális mátrix teremt kapcsolatot.

A tenzorkomponensek transzformációs tulajdonságairól mondottak értelmében (úgy transzformálódnak, mint megfelelő vektorkomponensek szorzatai) adódik, hogy egy valamelyik indexében kovariáns (kontravariáns) tenzorhoz a megfelelő komponenseken történő index felhúzással (lehúzással) az adott indexben kontravariáns (kovariáns) tenzor rendelhető hozzá. Így euklideszi terekben a kovariáns és kontravariáns tenzorok is azonosnak tekinthetők. A kovariáns és kontravariáns komponensek között pedig a g_{ij} és g^{ij} mátrixok teremtenek kapcsolatot. Az euklideszi tér tenzorait *euklideszi tenzor*oknak nevezzük.

Érdemes megvizsgálni a g_{ij} mátrix transzformációs tulajdonságait. Mivel két $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektor skaláris szorzata, azaz az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j$ mennyiség invariáns skalár, a g_{ij} mátrix elemei egy $(0, 2)$ rendű tenzor komponensei kell legyenek. A $g_{ij} \overline{e}^i \otimes \overline{e}^j$ tenzort az euklideszi tér *kovariáns fundamentális* vagy *metrikus* tenzorának nevezzük. A metrikus tenzor vegyes, $(1, 1)$ rendű komponensei a kovariáns komponensekből indexfelhúzással adódnak:

$$g_j^i = g_{kj} g^{ki} = \delta_j^i.$$

A kétszer kontravariáns, $(2, 0)$ rendű komponenseket újabb indexfelhúzással kapjuk

$$\delta_k^i g^{jk} = g^{ij}.$$

Tehát a g^{ij} mátrix, amit a g_{ij} mátrix inverzeként definiáltunk, éppen a metrikus tenzor kétszer kontravariáns komponenseit adja és így az indexek írásmódja megfelel a követelményeknek.

8. Vektorok és pontok deriváltja

Legyen adva az E_n euklideszi térben egy $F : R \supset [a, b] \mapsto E_n$ leképezés, azaz egy $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ vektor-skalár függvény az $[a, b]$ intervallumon ($t \in [a, b]$). Rögzítsünk egy $t_0 \in [a, b]$ értéket és vegyük a t-nek egy olyan sorozatát, amely tart t_0-hoz. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}(t)$ vektor *tart* a $\mathbf{O}$ nullvektorhoz, ha $|\mathbf{x}(t)| \to 0$, midőn $t \to t_0$. Mivel a normát a skalárszorzattal definiáltuk, a fenti definíció invariáns kijelentés.

Rögzítsünk egy $t_0 \in [a, b]$ értéket és képezzük a következő $\Delta\mathbf{x}$ vektort, ahol $t \in [a, b]$ úgy, hogy $t_0 \neq t$:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}(t).$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}(t)$ függvény *folytonos* a t_0 értéknél, ha tetszőleges $t \to t_0$ esetén $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{O}$.

Hasonló módon, ha $\exists \mathbf{v} \in E_n$ úgy, hogy $t \to t_0$ esetén

$$\left(\frac{\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}(t)}{t_0 - t} - \mathbf{v} \right) \to \mathbf{O},$$

akkor a $\mathbf{v}$ vektort az $\mathbf{x}(t)$ függvény t_0 helyen vett *vektorderivált*jának nevezzük. Jelölésben:

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t_0}.$$

Legyen E_n euklideszi ponttér és tekintsünk egy $t \in [a, b] \subset R$ skalárt. Ha a t minden felvett értékéhez hozzárendelünk egy $M \in \mathrm{E}_n$ pontot, akkor azt mondjuk, hogy M a t függvénye és ezt így írjuk $M = M(t)$. Ha rögzítünk egy O referenciapontot, az $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$ vektor a t-nek lesz vektorfüggvénye. Ha most azt is feltételezzük, hogy $\mathbf{x}$-nek létezik $\mathbf{v}$ vektorderiváltja, akkor azonnal látható, hogy az nem függ az O pont megválasztásától. Válasszunk ui. egy új P referenciapontot, amire írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}.$$

Mivel $\overrightarrow{OP}$ vektor nem függ t-től

$$\overrightarrow{PM}(t_0) - \overrightarrow{PM}(t) = \overrightarrow{OM}(t_0) - \overrightarrow{OM}(t).$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{\overrightarrow{PM}(t_0) - \overrightarrow{PM}(t)}{t_0 - t} \right) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\overrightarrow{OM}(t_0) - \overrightarrow{OM}(t)}{t_0 - t} \right) = \mathbf{v}.$$

Az ilyen módon egyértelműen definiált $\mathbf{v}$ vektort az *M pont vektorderiváltjá*nak hívjuk és $\frac{dM}{dt}$-vel jelöljük. Ha az O referenciapont mellett egy $\{\mathbf{e}_i\}$ bázist is megadunk, azaz rögzítünk egy $(O, \mathbf{e}_i)$ vonatkoztatási rendszert, az M pontot az $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}$ vektor x^i koordinátáival adhatjuk meg:

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{e}_i.$$

A fenti definícióból adódik, hogy az M pont $\mathbf{v}$ deriváltjának komponensei az x^i koordináták deriváltjaival egyenlők:

$$\mathbf{v} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i.$$

Hasonló módon vizsgálhatjuk egy $\mathbf{x}$ vektor több független α_j, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ skalártól való függésének esetét, azaz az $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ függvényt. Az $\mathbf{x}$ vektor α_i szerinti parciális deriváltja a valós függvények analízisében megszokott módon, azonnal általánosítható a t változó szerinti deriválás fenti definíciójából. Ugyancsak érvényes a *Young-tétel vektorfüggvényekre* alkalmazott általánosítása, ha a második parciális deriváltak folytonosak:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i}.$$

Érdemes megemlíteni a *láncszabály* általánosítását. Legyenek ui. az α_i paraméterek a t skalár deriválható függvényei: $\alpha_i = \alpha_i(t)$. Ekkor ha az $\mathbf{x}$ vektor t szerinti deriváltját keressük, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt}.$$

Az itt elmondottak minden változtatás nélkül fennállnak az euklideszi ponttér pontjainak deriváltjaira is, hiszen azokat éppen a megfelelő euklideszi vektortér vektorainak deriváltjaként értelmeztük.

9. Euklideszi ponttér görbevonalú koordinátái

Tekintsünk egy E_n n dimenziós euklideszi pontteret. Egy $(O, \mathbf{E}_i)$ vonatkoztatási rendszer bevezetése után egy M pont koordinátáit jelöljék x^i-k. Az alább bevezetendő új koordinátáktól való megkülönböztetés céljából, ezeket *egyenesvonalú* koordinátáknak hívjuk.

Tételezzük fel, hogy az E_n tér egy véges D *tartomány*át egy-egy értelmű és *folytonosan differenciálható* módon leképezhetjük az $\{y^j\}$ valós szám n-esek egy D' tartományára. Ez más szóval azt jelenti, hogy az x^i koordinátákat n darab y^j, független változó $x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ alakú folytonosan differenciálható függvényeként állíthatjuk elő úgy, hogy az y^j számok is kifejezhetők $y^j = y^j(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ differenciálható függvények alakjában, ha $M \in D$. A D és D' tartomány tulajdonságait külön kellene definiálni, de itt megelégszünk egy intuitív képpel, amely szerint mind a D-ben található pontok, mind a D'-ben található képpontok körül legyen található véges méretű n dimenziós "téglatest alakú" halmaz, úgy, hogy ezek a pontok a téglatestek belsejében helyezkednek el. (n dimenziós téglatest alatt olyan halmazt értünk, ami a koordinátaváltozók véges intervallumainak direkt szorzatából áll elő).

Azt mondjuk, hogy a fenti feltételeknek eleget tévő leképezéssel a D tartományon definiáltuk az $\{y^j\}$ *görbevonalú koordinátá*kat. Ha pl. rögzítünk n darab y^j koordinátából $n-1$-et és csak a j-edik y^j koordinátát engedjük szabadon változni, az E_n térban az y^j-nek egy vektor-skalár függvényét fogjuk kapni, ami szemléletesen szólva az E_n térben egy koordinátavonalat fog kijelölni.

Tekintsünk ezek után egy $M \in \mathrm{E}_n$ pontot és az M-et tartalmazó D tartományon definiált $\{y^j\}$ kordinátarendszert. Az y^j függvények definíciója szerint az M pontnak definiálhatjuk a rögzített indexű y^j paraméter szerinti vektorderiváltját.

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial M}{\partial y^j}, \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Az M pont az $(O, \mathbf{E}_i)$ vonatkoztatási rendszerben kifejtve:

$$\overrightarrow{OM} = x^i \mathbf{E}_i.$$

A vektorderiváltról mondottak ételmében a vektorderivált komponensei éppen a koordináták parciális deriváltjaival egyenlők, tehát

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathbf{E}_i.$$

Mivel feltételeztük, hogy az $x^i(y^j)$ függvények invertálhatók, a $\partial x^i / \partial y^j$ parciális deriváltakból képezett Jacobi-determináns a D' tartományon nem tűnik el:

$$\frac{D(x)}{D(y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots \quad\ \ \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ebből azonnal következik, hogy az $\mathbf{e}_j$ vektorok lineárisan függetlenek és így a megfeleltetett E_n euklideszi térben bázisrendszert alkotnak. Az $\{\mathbf{e}_i\}$ rendszert *természetes bázis*nak hívjuk. Szemléletesen szólva ez olyan bázisvektorok bevezetését jelenti, amelyek az M ponton áthaladó koordinátavonalak érintővektorai.

A görbevonalú koordinátarendszer megválasztásában nagyfokú szabadságunk van. Fejezzük ki ugyanis az y^j változókat n darab z^k új változó folytonosan deriválható, de egyébként tetszőleges $y^j = y^j(z^1, z^2, \dots, z^n)$ függvényeként oly módon, hogy egy, az M pontot tartalmazó tartományon belül létezzen és ne legyen nulla a $D(y^j)/D(z^k)$ Jacobi-determináns. Ekkor az $\{y^j\}$ koordinátákkal egyenrangú $\{z^k\}$ koordinátákhoz jutunk. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy *koordinátatranszformációt* hajtottunk végre. A $\{z^k\}$ koordinátarendszerben adott M ponthoz rendelt természetes $\mathbf{f}_k$ bázisvektorok különbözni fognak az $\{y^j\}$ rendszerben bevezetett $\mathbf{e}_j$ bázisvektoroktól. A transzformáció szabálya egyszerűen adódik a láncszabály alapján:

$$\mathbf{f}_k = \frac{\partial M}{\partial z^k} = \frac{\partial x^i}{\partial z^k}\mathbf{E}_i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial z^k}\mathbf{E}_i = \frac{\partial y^j}{\partial z^k}\mathbf{e}_j.$$

Fordítva pedig:

$$\mathbf{e}_j = \frac{\partial z^k}{\partial y^j}\mathbf{f}_k.$$

A koordinátatranszformáció tehát együttjár a természetes bázisrendszer következő lineáris transzformációjával:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{e}_j A^j_k \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_j = \mathbf{f}_k B^k_j, \quad \text{ahol} \quad A^j_k = \frac{\partial y^j}{\partial z^k} \quad \text{és} \quad B^k_j = \frac{\partial z^k}{\partial y^j}.$$

A duális bázis pedig a korábban mondottak alapján:

$$\mathbf{f}^k = B^k_j \mathbf{e}^j \quad \text{valamint} \quad \mathbf{e}^j = A^j_k \mathbf{f}^k.$$

szerint transzformálódik.

10. Skalár-, vektor- és tenzormezők

Legyen E_n egy euklideszi ponttér, amelyben bevezettünk egy $\{y^j\}$ koordinátarendszert. Ez a koordinátarendszer minden M pontban definiál egy (természetes) bázist a megfeleltetett E_n euklideszi térben, és így annak tenzorhatványaiban is. Azt mondjuk, hogy az E_n tér egy tenzorának az így definiált bázisra vonatkozóan adott komponensei az E_n ponttér M pontjához rendelt természetes bázisra vonatkozó komponensei.

Rendeljünk ezek után az E_n tér egy tartományának minden M pontjához azonos rendű euklideszi tenzort, az M pontnál az $\{y^i\}$ koordinátarendszer természetes bázisára vonatkozó komponenseinek megadásával. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\{y^i\}$ görbevonalú koordinátarendszerben definiáltunk egy *tenzormezőt*.

Láttuk, hogy a koordinátarendszer transzformációja a természetes bázisrendszer transzformációját eredményezi az M pontban. Ez azzal jár, hogy a fent definiált tenzormező M pontbeli komponensei is transzformálódni fognak. Pl. ha a $(2,1)$ rendű $\mathbf{t}$ tenzornak az $\{y^i\}$ koordinátarenszerben t^{ij}_k-k a komponensei, akkor a bázistranszformáció szabálya szerint az új $\{z^i\}$ rendszerbeli t'^{pq}_r komponenseire:

$$t'^{pq}_r = B^p_i B^q_j t^{ij}_k A^k_r$$

adódik, ahol az A és B mátrix komponensei a koordinátatranszformációnál látott módon állnak elő a koordinátafüggvények megfelelő parciális deriváltjaiból.

Ha egy $\mathbf{v}$ tenzor $(1,0)$ rendű (csak egy indexe van) *vektormezőnek* hívjuk és a v^j komponenseinek transzformációs szabálya:

$$v'^k = B^k_j v^j.$$

Speciális vektormezőt alkotnak pl. az $\{\mathbf{e}_i\}$ természetes bázisrendszer adott indexű vektorai. Rögzített i index esetén a komponensek $e^j = \delta^j_{(i)}$.

Egy másik fontos tenzormező a

$$\mathbf{g} = g_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$$

metrikus tenzor mezője, aminek $(0,2)$ rendű, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ komponensei természetesen a

$$g'_{kl} = g_{ij} A^i_k A^j_l$$

szabály szerint transzformálódnak.

Az E_n euklideszi ponttérben definiáljuk az M *pont differenciálját* a következő vektorral:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial y^i} dy^i = \mathbf{e}_i dy^i,$$

ahol dy^i jelöli a dM vektor kontravariáns komponenseit az M ponthoz rendelt természetes bázisban.

Ennek a vektornak a normája:

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j.$$

Koordinátarendszer-transzformáció esetén a természetes bázisrendszer megváltozik, de az *ívelemnégyzetnek* (vagy *metrikának*)nevezett ds^2 értéke nem (invariáns skalár). ds^2 közel egyenlõ azon M és $M + dM$ pontok közötti távolságnégyzettel, amelyeknek i-edik koordinátája közötti eltérés dy^i.

Ha egy $\mathbf{s}$ tenzormező $(0,0)$ rendű (nincs egy indexe sem), *skalármezővel* van dolgunk. Ekkor a vizsgált tartomány minden pontjához egy s számot rendelünk, aminek értéke a koordinátarendszer transzformációja esetén nem változik.

Képezzük az $\mathbf{s}$ skalármező s értékének az y^i koordináták szerinti parciális deriváltjait:

$$D_i = \frac{\partial s}{\partial y^i},$$

és vizsgáljuk meg hogyan változnak a D_i értékek, ha új $\{z^j\}$ rendszerre térünk át. Definíció szerint az új rendszerben

$$D'_j = \frac{\partial s}{\partial z^j}.$$

A közönséges többváltozós függvényekre érvényes láncszabály szerint ugyanakkor

$$\frac{\partial s}{\partial z^j} = \frac{\partial s}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial z^j}.$$

Látjuk tehát, hogy a D_i parciális deriváltak úgy transzformálódnak, mint egy vektormező kovariáns komponensei és ezért joggal írtuk az indexet alulra. A $D_i\mathbf{e}^i$ vektormező vektorát az M pontban, az $\mathbf{s}$ skalármező *gradiensének* nevezzük.

11. Christoffel-szimbólumok

Ha egy E_n euklideszi ponttérben egy komponenseivel adott vektor- vagy tenzormezőnek a hely szerinti változását vizsgáljuk (deriválás), össze kell hasonlítanunk egymáshoz közeli pontokban felvett értéküket. Görbevonalú koordinátarendszerben azonban a természetes bázis helyről helyre változik, úgyhogy a két különböző pontban adott komponensek nem ugyanarra a bázisra vonatkoznak. A komponensek változása így nem pusztán a vektormező változását tükrözi. Vektor- és tenzormező deriváltjának kiszámításához ezért egy speciális eljárást kell alkalmazni.

Tekintsük az $\mathbf{e}_i$ bázisvektort az n darab y^k koordinátának mint paraméternek a vektorfüggvényét. A vektorfüggvények deriválásáról szóló szakaszban láttuk, hogy elég "síma" paraméterezés mellett definiálható ennek, a megfelelő paraméter szerinti parciális deriváltja, ami újra vektorfüggvény lesz. Ez a deriváltvektor nyilván kifejezhető az adott M pontban definiált természetes bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma^{\,j}_{k\,i} \mathbf{e}_j,$$

ahol az y^k szerinti parciális deriválásra bevezettük a ∂_k jelölést.

A lineáris kombinációban bevezetett n^3 darab helyfüggő, egyelőre ismeretlen $\Gamma^{\,j}_{k\,i}$ mennyiség, amelyeket *másodfajú Christoffel-szimbólumok*nak hívnak, összefüggésbe hozható a g_{ij} mátrix deriváltjaival. Vegyük ugyanis a metrikát definiáló $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ egyenlet parciális deriváltját. Két vektorfüggvény skaláris szorzatának paraméter szerinti deriválásánál a skaláris szorzás tulajdonságai (linearitás mindkét tényezőben) miatt azonnal alkalmazható a közönséges függvényeknél megtanult *Leibniz-szabály*:

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma^{\,p}_{k\,i} \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \Gamma^{\,p}_{k\,j} \mathbf{e}_p = \Gamma^{\,p}_{k\,i} g_{pj} + \Gamma^{\,p}_{k\,j} g_{ip}.$$

Bár, mint később megmutatjuk, a $\Gamma^{\,j}_{k\,i}$ mennyiségek nem tenzorkomponensek, érdemes bevezetni a második index formális lehúzásával az ún. *elsőfajú Christoffel-szimbólumok*at:

$$\Gamma_{kji} = g_{pj} \Gamma^{\,p}_{k\,i} \quad \text{és} \quad \Gamma^{\,j}_{k\,i} = g^{pj} \Gamma_{kpi}.$$

A g_{ij} fundamentális mátrix parciális deriváltjai az elsőfajú Christoffel-szimbólumokkal kifejezve, a

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{kij}$$

alakot öltik.

Mivel $\mathbf{e}_i = \partial_i M$, adódik, hogy

$$\partial_k \mathbf{e}_i = \partial_k \partial_i M.$$

A Young-tétel szerint viszont $\partial_k \partial_i M = \partial_i \partial_k M$, amiből következik, hogy

$$\partial_k \mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{e}_k.$$

Tehát

$$\Gamma^{\,p}_{k\,i} \mathbf{e}_p = \Gamma^{\,p}_{i\,k} \mathbf{e}_p.$$

Az egyenlet mindkét oldalát skalárisan szorozva $\mathbf{e}_j$-vel, nyerjük, hogy

$$\Gamma_{k\,i}^{\,p} g_{pj} = \Gamma_{i\,k}^{\,p} g_{pj},$$

azaz az elsőfajú Christoffel-szimbólumok szimmetrikusak az első és harmadik indexükben:

$$\Gamma_{kji} = \Gamma_{ijk}.$$

Ezt kihasználva írhatjuk:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij},$$

ami az indexek ciklikus permutációjával átírható:

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jki} \quad \text{valamint}$$

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{ijk} \quad \text{alakban.}$$

Összeadva az első két egyenletet és kivonva a harmadikat nyerjük

$$\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk} = 2\Gamma_{kij}.$$

A Christoffel-szimbólumok tehát adott g_{ij} esetén egyértelműen kifejezhetők:

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{jk}\right) \quad \text{és}$$

$$\Gamma_{k\,j}^{\,i} = \Gamma_{kpj} g^{pi}.$$

Mint már említettük a Christoffel-szimbólumok nem alkotják egy harmadrendű tenzor komponenseit, ami abból is nyilvánvaló, hogy egyenesvonalú koordinátarendszerben eltűnnek, és így, ha egy tenzor komponensei lennének, minden más rendszerben is eltűnnének a komponensei. Most erről az állításról a transzformációs tulajdonságok explicit felírásával is meggyőződhetünk.

Térjünk tehát át egy új $\{z^i\}$ koordinátarendszerre. Az M pontban az új természetes bázis legyen $\{\mathbf{f}_i\}$. Az $\{y^i\}$ rendszerhez tartozó $\{\mathbf{e}_i\}$ bázissal kifejezve

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j A_i^j, \quad \mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i B_j^i.$$

Vegyük az egyenlet z^k koordináta szerinti parciális deriváltját:

$$\frac{\partial}{\partial z^k}\mathbf{f}_i = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(\mathbf{e}_j A_i^j\right).$$

Az egyenlet bal oldala éppen a $\{z^i\}$ rendszerbeli $\Gamma'^{\,p}_{k\,i}\mathbf{f}_p$-vel egyenlő. A jobb oldalon pedig a szorzat deriválásánál adódó második tagban alkalmazzuk a láncszabályt:

$$\Gamma'^{\,p}_{k\,i}\mathbf{f}_p = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(A_i^j\right)\mathbf{e}_j + A_i^j \frac{\partial y^q}{\partial z^k}\frac{\partial}{\partial y^q}\mathbf{e}_j.$$

A jobb oldalon az y^q koordináták z^k szerinti parciális deriváltját beírva és a második tagban a Christoffel-szimbólumok definícióját kihasználva, nyerjük, hogy

$$\Gamma'^{\,p}_{k\,i}\mathbf{f}_p = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(A_i^j\right)\mathbf{e}_j + A_i^j A_k^q \Gamma_{q\,j}^{\,r}\mathbf{e}_r.$$

Végül a jobb oldalon is áttérve az $\{\mathbf{f}_i\}$ bázisra

$$\Gamma'^{p}_{k\,i}\mathbf{f}_p = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(A^j_i\right)\mathbf{f}_p B^p_j + A^j_i A^q_k \Gamma^{\,r}_{q\,j}\mathbf{f}_p B^p_r.$$

Az egyenletet nullára redukálva, az $\mathbf{f}_p$ vektor kiemelése után annak együtthatója nulla kell legyen, amiből:

$$\Gamma'^{p}_{k\,i} = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(A^j_i\right) B^p_j + A^j_i A^q_k \Gamma^{\,r}_{q\,j} B^p_r.$$

Ha jobb oldalon csak a második tag szerepelne, akkor lennének a $\Gamma^{\,r}_{q\,j}$ elemek egy tenzor komponensei.

A Christoffel-szimbólumoknak ezen transzformációs szabálya lehetővé teszi, hogy a korábban látottnál egyszerűbben is kiszámíthassuk őket a $\{z^i\}$ görbevonalú koordinátarendszerben, ha adott a z^i koordinátáknak az x^j egyenesvonalú koordinátáktól való $z^i = z^i(x^j)$ függése. A fenti képletben ugyanis a második tag egyenesvonalú koordinátákban eltűnik és így a $\{z^i\}$ rendszerbeli Christoffel-szimbólumokra írhatjuk, hogy

$$\Gamma^{\,p}_{k\,i} = \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^k \partial z^i}\right)\frac{\partial z^p}{\partial x^j}.$$

12. Kovariáns deriválás

A Christoffel-szimbólumok segítségével most már meg tudjuk oldani a vektor- és tenzormezők deriválásának problémáját. Legyen $\mathbf{v}$ egy vektormező, amit minden M pontban a természetes bázisra vonatkozó v^i komponenseivel adunk meg. Tehát minden M pontban:

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i,$$

ahol mind a v^i komponensek, mind az $\mathbf{e}_i$ természetes bázisvektorok függenek a helytől. Ha az M pontból egy $M + dM$ pontba mozdulunk el, a $\mathbf{v}$ vektor értéke $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$-re változik, ahol a $d\mathbf{v}$ (véges) különbségvektor

$$d\mathbf{v} = \left(v^i + dv^i\right)(\mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i) - v^i\mathbf{e}_i.$$

Itt dv^i jelöli a komponensek és $d\mathbf{e}_i$ a bázisvektorok megváltozását. Hangsúlyozni kell, hogy maga a $d\mathbf{v}$ vektor nem függ a koordinátarendszer megválasztásától és ezért szokás a $\mathbf{v}$ vektor *abszolút differenciáljá*nak is nevezni.

Elvégezve a szorzást azt kapjuk, hogy

$$d\mathbf{v} = dv^i\mathbf{e}_i + v^i d\mathbf{e}_i + dv^i d\mathbf{e}_i.$$

A dv^i komponensek és a $d\mathbf{e}_i$ vektorok, a dy^j-kben lineáris tagokat kiírva, a

$$dv^i = \partial_j v^i dy^j + o(dy^j) \text{ és } d\mathbf{e}_i = \partial_j \mathbf{e}_i dy^j + o(dy^j)$$

alakot öltik. Ennek segítségével

$$d\mathbf{v} = \left(\partial_j v^i\mathbf{e}_i + v^i\partial_j\mathbf{e}_i\right)dy^j + o(dy^j).$$

A zárójelben szereplő második tagban felhasználjuk a Christoffel-szimbólumokat és az összegző i indexet k-ra cseréljük

$$d\mathbf{v} = \left(\partial_j v^i + v^k \Gamma^{\,i}_{j\,k}\right) dy^j \mathbf{e}_i + o(dy^j).$$

Látjuk, hogy a $d\mathbf{v}$ vektor komponensei lineáris közelítésben $\left(\partial_j v^i + v^k \Gamma^{\,i}_{j\,k}\right) dy^j$-vel egyenlők. Mivel a dy^j a dM vektor komponenseit jelöli, a tenzorkomponensek kritériumaira mondottak értelmében a zárójelben álló kifejezés egy tenzor(mező) $(1,1)$ rendű komponenseinek felel meg.

Ezt a tenzormezőt a $\mathbf{v}$ vektormező *kovariáns deriváltjá*nak nevezzük és az $(1,1)$ rendű komponenseit $\nabla_j v^i$-vel jelöljük. A kovariáns deriválttenzor ezek szerint

$$\nabla_j v^i \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i, \quad \text{ahol} \quad \nabla_j v^i = \partial_j v^i + v^k \Gamma^{\,i}_{j\,k}.$$

A $d\mathbf{v}$ vektor i-edik komponense pedig $\nabla_j v^i dy^j$.

Descartes-rendszerben a Christoffel-szimbólumok eltűnnek és így a $d\mathbf{v}$ vektor komponensei $\partial_j v^i dy^j$-vel egyenlők, azaz a deriválttenzor komponenseit a $\partial_j v^i$ mátrix elemei adják.

Érdemes meghatározni a $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{(i)}$ vektormező deriválttenzorát, ahol i rögzített. Ez az i indexű természetes báziselemek mezője. Mivel $\mathbf{v} = \delta^j_{(i)} \mathbf{e}_j$, a $\mathbf{v}$ komponenseire írhatjuk, hogy

$$\nabla_k \delta^j_{(i)} = \partial_k \delta^j_{(i)} + \Gamma^{\,j}_{k\,p} \delta^p_{(i)} = \Gamma^{\,j}_{k\,(i)}.$$

Tehát az i-edik báziselemből álló vektormező deriválttenzorának komponensei éppen egyenlők a harmadik indexében i értéket felvevő Christoffel-szimbólumokkal. Ez nem mond ellent annak a ténynek, hogy a Christoffel-szimbólumok nem alkotják egy harmadrendű tenzormező komponenseit, hiszen itt rögzített i mellett másodrendű tenzormezőt kaptunk, aminek komponensei nem is transzformálódnak át bázistranszformáció esetén a transzformált bázisrendszerhez kapcsolódó Christoffel-szimbólumokba.

Vizsgáljuk meg a $\mathbf{v}$ vektormező deriválttenzorának $(0,2)$ rendű komponenseit, amiket $\nabla_k v_i$-vel jelölünk. Ezeket a második, kontravariáns indexet lehúzva kapjuk meg:

$$\nabla_k v_i = g_{ij} \nabla_k v^j = g_{ij} \partial_k v^j + g_{ij} \Gamma^{\,j}_{k\,p} v^p.$$

Az első tagban a parciális deriválást átrendezhetjük:

$$\nabla_k v_i = \partial_k (g_{ij} v^j) - v^j \partial_k g_{ij} + g_{ij} \Gamma^{\,j}_{k\,p} v^p.$$

Az első tag a v_i parciális deriváltja, míg a második tagban a g_{ij} parciális deriváltjait kicserélhetjük a Christoffel-szimbólumokkal, a harmadik tagban pedig elvégezhetjük a j index összeejtését:

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - v^j \Gamma_{kij} - v^j \Gamma_{kji} + \Gamma_{kip} v^p.$$

A második és negyedik tag kiesik, a harmadik tagban pedig a j index helyzetét cseréljük meg, amivel végül megkapjuk a deriválttenzor kétszer kovariáns mátrixát a vektormező kovariáns komponenseiből:

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - v_j \Gamma^{\,j}_{k\,i}.$$

Az eddigi eredmények alapján meghatározhatjuk magasabb rendű tenzormezők kovariáns deriváltjait is. Legyen pl. $\mathbf{t}$ egy $(2,0)$ rendű tenzormező, aminek komponenseit jelölje t^{ij}. A tenzor abszolút differenciálja

$$\begin{aligned} d\mathbf{t} &= \left(t^{ij} + dt^{ij}\right)(\mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j) - t^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \partial_k t^{ij} dy^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + t^{ij}\partial_k \mathbf{e}_i dy^k \otimes \mathbf{e}_j + t^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \partial_k \mathbf{e}_j dy^k + o(dy^i). \end{aligned}$$

Végül felhasználva a $\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma^{\ p}_{k\ i}\mathbf{e}_p$ összefüggést

$$d\mathbf{t} = \left(\partial_k t^{ij} + t^{pj}\Gamma^{\ i}_{k\ p} + t^{ip}\Gamma^{\ j}_{k\ p}\right) dy^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + o(dy^i),$$

ahol a második tagban az i és p, a harmadik tagban pedig a j és p összegző indexeket felcseréltük.

A $\mathbf{t}$ tenzormező kovariáns derivélttenzorának komponenseit, amiket $\nabla_k t^{ij}$-vel jelölünk, azonnal leolvashatjuk

$$\nabla_k t^{ij} = \partial_k t^{ij} + t^{pj}\Gamma^{\ i}_{k\ p} + t^{ip}\Gamma^{\ j}_{k\ p}.$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges számú kontravariáns index esetére az eljárást megismételve azt kapjuk, hogy minden egyes indexnek megfelelően egy további "Christoffel-szimbólumos tag" jelenik meg. Hasonlóan látható be, hogy bármelyik index lehúzása úgy történik, hogy a megfelelő tagokat kell kicserélni a vektormezőnél látott módon.

Általában tehát írhatjuk egy (n,m) rendű $\mathbf{t}$ tenzor kovariáns deriváltjának komponenseire:

$$\begin{aligned} \nabla_k t^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_m} &= \partial_k t^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_m} + \Gamma^{\ i_1}_{k\ s} t^{s i_2 i_3 \ldots i_n}_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_m} + \Gamma^{\ i_2}_{k\ s} t^{i_1 s i_3 \ldots i_n}_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_m} + \Gamma^{\ i_3}_{k\ s} t^{i_1 i_2 s \ldots i_n}_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_m} + \cdots \\ &+ \Gamma^{\ i_n}_{k\ s} t^{i_1 i_2 i_3 \ldots s}_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_m} - \Gamma^{\ s}_{k\ j_1} t^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}_{s j_2 j_3 \cdots j_m} - \Gamma^{\ s}_{k\ j_2} t^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}_{j_1 s j_3 \cdots j_m} - \Gamma^{\ s}_{k\ j_3} t^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}_{j_1 j_2 s \ldots j_m} - \cdots - \Gamma^{\ s}_{k\ j_m} t^{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n}_{j_1 j_2 j_3 \ldots s} \end{aligned}$$

Érdemes külön megvizsgálni a "szorzatok" deriválási szabályát. Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ két tenzormező, amelyeknek tenzori szorzata $\mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$. A megfelelő kontravariáns komponensek: $u^{lmn\cdots}w^{pqr\cdots}$.

Írjuk fel a deriválttenzor komponenseit

$$\begin{aligned} \nabla_k \left(u^{lmn\cdots}w^{pqr\cdots}\right) &= \partial_k \left(u^{lmn\cdots}w^{pqr\cdots}\right) + \Gamma^{\ l}_{k\ s} u^{smn\cdots}w^{pqr\cdots} + \Gamma^{\ m}_{k\ s} u^{lsn\cdots}w^{pqr\cdots} + \cdots \\ + \Gamma^{\ p}_{k\ s} u^{lmn\cdots}w^{sqr\cdots} + \Gamma^{\ q}_{k\ s} u^{lmn\cdots}w^{psr\cdots} + \cdots &= w^{pqr\cdots}(\partial_k u^{lmn\cdots} + \Gamma^{\ l}_{k\ s} u^{smn\cdots} + \Gamma^{\ m}_{k\ s} u^{lsn\cdots} + \cdots) \\ &+ u^{lmn\cdots}(\partial_k w^{pqr\cdots} + \Gamma^{\ p}_{k\ s} w^{sqr\cdots} + \Gamma^{\ q}_{k\ s} w^{psr\cdots} + \cdots). \end{aligned}$$

Azaz

$$\nabla_k \left(u^{lmn\cdots}w^{pqr\cdots}\right) = (\nabla_k u^{lmn\cdots})w^{pqr\cdots} + u^{lmn\cdots}\nabla_k w^{pqr\cdots}.$$

A tenzori szorzat kovariáns deriváltját tehát szintén a Leibniz-féle szabály szerint kell kiszámítani, úgy ahogy a függvények szorzatának közönséges deriváltját. A felírásban szerepelhettek volna kovariáns indexek is – a levezetésből nyilvánvaló, hogy a szabály akkor is érvényben marad.

Számítsuk ki a metrikus tenzor kovariáns deriváltját. A metrikus tenzor vegyes indexű komponensei Kronecker-deltával egyenlők: $\mathbf{g} = \delta^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$. A deriválási szabály szerint:

$$\nabla_k \delta^i_j = \partial_k \delta^i_j - \Gamma^{\ s}_{k\ j}\delta^i_s + \Gamma^{\ i}_{k\ s}\delta^s_j = 0 - \Gamma^{\ i}_{k\ j} + \Gamma^{\ i}_{k\ j} = 0.$$

Tehát a metrikus tenzor deriváltja nulltenzor. Euklideszi térben ez nyilvánvaló, hiszen mindig lehet találni egyenesvonalú koordinátarendszert, amiben a metrikus tenzor komponensei állandók és így parciális deriváltjaik nullák. A levezetésben nem használtuk ki az egyenesvonalú koordinátarendszer létét, így az eredmény általánosabb esetben is igaz.

A metrikus tenzornak ez a tulajdonsága indokolja a fent bevezetett jelölést, ugyanis ha a Leibniz-szabály figyelembevételével kiszámítjuk a $\nabla_k v_i$ értékét, azt kapjuk, hogy

$$\nabla_k v_i = \nabla_k (g_{ij} v^j) = v^j \nabla_k g_{ij} + g_{ij} \nabla_k v^j,$$

ahol az első tag nulla. Tehát a fundamentális mátrixszal szabadon "járhatunk oda-vissza" a kovariáns derivált jel mögé vagy elé.

13. Nevezetes differenciáloperátorok

A skalármező bevezetésénél már láttunk egy fontos differenciáloperátort – az $\mathbf{s}$ skalármező gradiensének képzését:

$$grad_i \mathbf{s} = \partial_i s.$$

Ez a kovariáns deriválás szabályának alkalmazása a $(0,0)$ rendű (skalár) vektormezőkre. Érdekes tény, hogy egy skalármező értékének egyszerű parciális deriváltjai vektorkomponenseket adnak. A kontravariáns komponensek szokásos módon származtathatók

$$grad^j \mathbf{s} = g^{ij} \partial_i s.$$

Egy másik fontos differenciáloperátor a divergenciaképzés operátora. Ha $\mathbf{v}$ egy $(1,0)$ rendű vektormező, képezhetjük a kovariáns deriválttenzorának a spurját, azaz a deriválttenzor indexeit összeejthetjük

$$div \mathbf{v} = \nabla_i v^i = \partial_i v^i + \Gamma^{\,i}_{i\,j} v^j.$$

A $div\mathbf{v}$ nyilvánvalóan skalár mennyiség és így értéke független a koordinátarendszer megválasztásától.

A fenti kifejezés átalakítható, ha kihasználjuk a Christoffel-szimbólumoknak az alábbiakban bemutatott tulajdonságát.

Vegyük a $\nabla_k g_{ij} = 0$ egyenletet és szorozzuk meg g^{ij}-vel. Az eredményt kiírva:

$$g^{ij} \partial_k g_{ij} - \Gamma^{\,i}_{k\,i} - \Gamma^{\,j}_{k\,j} = 0,$$

amiből összevonás és indexcsere után adódik, hogy

$$\Gamma^{\,i}_{i\,k} = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_k g_{ij}.$$

A jobb oldal kifejezhető a g determináns segítségével, a láncszabály szerint ugyanis

$$\partial_k g = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \partial_k g_{ij}.$$

A g determináns egy g_{ij} eleme szerinti deriváltja viszont egyenlő a megfelelő $[g^{ij}]$ aldeterminánssal:

$$\partial_k g = \left[g^{ij}\right] \partial_k g_{ij}.$$

Mivel ugyanakkor

$$g^{ij} = \frac{[g^{ij}]}{g},$$

amit átszorozva g-vel adódik, hogy

$$\partial_k g = g g^{ij} \partial_k g_{ij}.$$

$$\Gamma^{\,i}_{i\,k} = \frac{1}{2g}\partial_k g = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_k \sqrt{|g|}.$$

Ennek felhasználásával a vektormező divergenciájára végül is azt kapjuk, hogy

$$div\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_k \left(\sqrt{|g|} v^k\right).$$

Speciálisan, ha egy $\mathbf{s}$ skalármező gradiensére alkalmazzuk a divergenciaképzés operátorát egy újabb fontos operátort nyerünk, az ún. Laplace-operátort, amit Δ-val jelölünk. Hatása a skalármezőre:

$$\Delta s = divgrad\mathbf{s} = \nabla_i \left(g^{ij}\partial_j s\right).$$

A divergencia fenti alakját használva

$$\Delta s = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_k \left(\sqrt{|g|} g^{kj}\partial_j s\right).$$

14. Ívelem, ívhossz és geodetikus vonal

Euklideszi ponttérben Descartes-rendszer használata esetén a metrikus tenzor g^D_{ij} komponenseit azonnal fel tudjuk írni $g^D_{ij} = \delta_{ij}$, amiből a más koordinátarendszerbeli komponenseit mindig elő tudjuk állítani a megfelelő transzformációval:

$$g_{ij} = A^k_i A^m_j g^D_{km} = A^k_i A^m_j \delta_{km} = \sum_{m=1}^{n} A^m_i A^m_j.$$

Nem euklideszi ponttérben azonban, mint pl. a fizikai alkalmazások szempontjából fontos, később definiálandó ún. Riemann-sokaságok esetén, Descartes-rendszert nem használhatunk. Ilyenkor is fennáll a g_{ij} mátrixnak az a tulajdonsága, ami szerint két nagyon közeli pont ds^2 távolságnégyzete, amelyeknek koordinátái dx^i-vel különböznek egymástól, a következő kvadratikus formával adható meg

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Ezt a kvadratikus formát *metrikának* nevezzük, ds^2 pedig nyilvánvalóan invariáns skalár. A metrika segítségével egy véges görbének az s *ívhosszát* is definiálhatjuk, amennyiben a görbe, a koordinátáinak $t \in [a,b]$ paraméter szerinti $y^i = y^i(t)$ függvényeként adott és létezik a következő integrál

$$S = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\frac{dy^i}{dt}\frac{dy^j}{dt}}dt.$$

Ha rögzítettük az $y^i(a)$ és $y^i(b)$ pontokat, a két pontot összekötő folytonos görbék között kereshetjük a legrövidebbet. A feladat a variációszámítás módszerével oldható meg, azaz keresendő a

$$\delta S = 0$$

egyenlet megoldása. Vezessük be a következő egyszerűsítő jelölést: $f = g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j$, ahol $\dot{y}^i = \frac{dy^i}{dt}$, amivel az elemi ívhossz

$$ds = \sqrt{f}dt.$$

A variációs probléma Euler-egyenlete:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial\dot{y}^i}\right) - \frac{\partial\sqrt{f}}{\partial y^i} = 0.$$

A parciális deriválások végrehajtása után a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial f}{\partial\dot{y}^i}\right) - \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0$$

alakra jutunk. Az egyenletben szereplő deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{y}^i} = 2g_{ij}\dot{y}^j \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y^i} = \partial_i g_{jk}\dot{y}^j\dot{y}^k,$$

amiket behelyettesítve az egyenlet így alakul:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{\sqrt{f}}g_{ij}\dot{y}^j\right) - \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_i g_{jk}\dot{y}^j\dot{y}^k = 0.$$

Hajtsuk vére az első tagban a t-szerinti deriválást úgy, hogy g_{ij}-t a láncszabály alkalmazásával először a y^k koordináták szerint deriváljuk:

$$2\partial_k g_{ij}\dot{y}^k\frac{\dot{y}^j}{\sqrt{f}} + 2g_{ij}\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}^j}{\sqrt{f}} - \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_i g_{jk}\dot{y}^j\dot{y}^k = 0.$$

$\sqrt{f}$-fel történő osztás után a t paraméter szerinti deriválásról, a $ds = \sqrt{f}dt$ összefüggés alapján áttérhetünk az s ívhossz szerinti deriválásra, azaz alkalmazzuk az

$$\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}$$

helyettesítést, amivel az egyenlet

$$2\partial_k g_{ij}\frac{dy^k}{ds}\frac{dy^j}{ds}+2g_{ij}\frac{d^2y^j}{ds^2}-\partial_i g_{jk}\frac{dy^j}{ds}\frac{dy^k}{ds}=0$$

lesz. Kiemelés és 2-vel való osztás után

$$g_{ij}\frac{d^2y^j}{ds^2}+\left(\partial_k g_{ij}-\frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\right)\frac{dy^j}{ds}\frac{dy^k}{ds}.$$

A zárójelben álló tényező egy, a j és k indexekben szimmetrikus mátrixszal van megszorozva, ezért vehetjük a szimmetrikus részét:

$$g_{ij}\frac{d^2y^j}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij}-\frac{1}{2}\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ik}-\frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\right)y^j y^k=0.$$

A zárójelbe került kifejezés egyenlő a Γ_{kij} Christoffel-szimbólummal, így az egyenlet végső alakja az i index felhúzása után

$$\frac{d^2y^p}{ds^2}+\Gamma_{k\,j}^{\,p}\frac{dy^k}{ds}\frac{dy^j}{ds}=0.$$

Az eredmény az ún. *geodetikus vonal* egyenlete, ahol a deriválások az s ívhossz szerint végzendők el..

Érdemes a problémát más oldalról is megközelíteni. Tételezzük fel, hogy az $y^i(t)$ görbe egy tömegpont mozgásának felel meg, ahol t az időt jelöli. A pillanatnyi *sebességvektor* kontravariáns komponensei

$$v^i=\frac{dy^i}{dt}.$$

A mozgás *gyorsulás*a a pálya mentén vett két közeli pontban vett sebességvektor közötti különbségnek és az eltelt dt időnek hányadosából származtatható

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

A $\mathbf{v}$ vektor $d\mathbf{v}$ abszolút differenciálja $d\mathbf{v}=\left(\partial_j v^i+v^k\Gamma_{j\,k}^{\,i}\right)dy^j\mathbf{e}_i$, amiből a gyorsulás

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\left(\partial_j v^i+v^k\Gamma_{j\,k}^{\,i}\right)\frac{dy^j}{dt}\mathbf{e}_i.$$

Az $\mathbf{a}$ gyorsulásvektor i-edik komponense ebből

$$a^i=\frac{d^2y^i}{dt^2}+\Gamma_{j\,k}^{\,i}\frac{dy^j}{dt}\frac{dy^k}{dt},$$

ahol visszaírtuk a sebességvektor komponenseinek fent definiált alakját. Ha a mozgás egyenesvonalú, egyenletes mozgás, a gyorsulás nulla. Az ívhossz változása a mozgás során az időnek lineáris függvénye, amiből $dt=cds$ és így az $a^i=0$ feltétel megfelel a geodetikus vonal fent levezetett egyenletének. A gyorsulás fenti definíciója nem támaszkodott az euklideszi tér tulajdonságaira, ezért általában is elfogadhatjuk. Erőmentes mozgás pályája ezek szerint geodetikus vonal.

15. Elemi térfogat

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy viszonylag egyszerű megadni az E_n tér egy olyan n dimenziós elemi paralelepipedonjának dV térfogatát, aminek éleit az $\mathbf{e}_i dy^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorok alkotják:

$$dV = \sqrt{|g|} dy^1 dy^2 \cdots dy^n.$$

Véges térfogat kiszámítása ennek a kifejezésnek az integrálásával történhet.

Érdemes felírni a Gauss-tétel görbevonalú koordinátákban érvényes alakját. A tétel állítása nem függ a koordinátarendszer megválasztásától, hiszen nem a koordinátákra vonakozó kijelentést tartalmaz:

$$\int_V div \mathbf{v} dv = \int_F \mathbf{v} df,$$

azaz a $\mathbf{v}$ vektormező divergenciájának V térfogatra vett térfogati integrálja egyenlő a vektormezőnek az adott térfogatot körülölelő felületre vett integráljával. Felhasználva az elemi térfogat és a divergencia alakját, a bal oldalt átalakíthajuk

$$\int\limits_V \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_k \left(\sqrt{|g|} v^k \right) \sqrt{|g|} dy^1 dy^2 \cdots dy^n = \int\limits_V \partial_k \left(\sqrt{|g|} v^k \right) dy^1 dy^2 \cdots dy^n,$$

ami azt mutatja, hogy a koordináták, mint formális változók szerint alkalmazhatjuk a Gauss-tétel Descartes-rendszerbeli alakját:

$$\int\limits_V \partial_k \left(\sqrt{|g|} v^k \right) dy^1 dy^2 \cdots dy^n = \int\limits_F \sqrt{|g|} v^k df_k,$$

ahol df_k jelöli a felületelemhez rendelt kovariáns vektor komponenseit.