10. statisztikus fizika gyakorlat

2018. május 4.

1. Diszkutáljuk a háromdimenziós, nemrelativisztikus degenerált (alapállapoti) ideális Fermi-gáz termodinamikáját!
2. Vizsgáljuk meg a háromdimenziós, nemrelativisztikus, ideális Fermi-gáz alacsony hőmérsékleti viselkedését (kémiai potenciál, energia, hőkapacitás)!
3. Tekintsünk egy (valamilyen energia körül) szimmetrikus állapotsűrűséggel leírható elektronrendszert!
   (a) Mutassuk meg, hogy félig betöltött sáv esetén a kémiai potenciál nem függ a hőmérséklettől!
   (b) Számítsuk ki a rendszer $\chi_\mathrm{P} = \mu_\mathrm{B}^2 \int \rho'(\varepsilon)\,\overline{n}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$ Pauli-féle paramágneses szuszceptibilitásának hőmérsékletfüggését alacsony hőmérsékleten! Megállapítható-e a szuszceptibilitás hőmérsékletfüggéséből, hogy az állapotsűrűség konvex vagy konkáv-e a Fermi-energián?

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Határozzuk meg azt a hőmérsékletet (T_F függvényében), ahol egy háromdimenziós ideális Fermi-gáz kémiai potenciálja zérussá válik!
   (a) Írjuk fel az energia-állapotsűrűség ε-tól való függését!
   (b) Írjuk fel az N részecskeszám általános energiaintegrálját a keresendő T_1 hőmérsékleten, feltéve, hogy $\mu = 0$.
   (c) Vezessük be az $x = \beta_1\varepsilon$ változót az integrál dimenziótlanítása végett!
   (d) Írjuk fel zérus hőmérsékleten (nemzérus kémiai potenciál mellett) a részecskeszámot, és ebből fejezzük ki a T_F Fermi-hőmérsékletet!
   (e) Határozzuk meg a T_1 hőmérsékletet, amennyiben tudjuk, hogy $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = I_0 \approx 0.678$.
2. Diszkutáljuk a kétdimenziós, ultrarelativisztikus degenerált (alapállapoti) ideális Fermi-gáz termodinamikáját A terület mellett!
   (a) Határozzuk meg az energia-állapotsűrűséget!
   (b) A részecskeszám energiaintegráljából határozzuk meg az átlagos részecskeszám és a Fermi-energia kapcsolatát!
   (c) Az átlagos energia energiaintegráljából határozzuk meg az $\langle E\rangle / \langle N\rangle$ fajlagos energiát a Fermi-energia függvényében!
   (d) A $pA = \frac{1}{2}\langle E\rangle$ állapotegyenletből határozzuk meg a zérus hőmérsékleti nyomást!
   (e) Mekkora az izoterm kompresszibilitás a nyomás függvényében? Figyelem: területfüggő konstanst deriválni kell terület szerint!
3. Egy elektronrendszert mágneses tér hiányában a $\rho(\varepsilon)$ állapotsűrűség írja le. H mágneses tér bekapcsolása esetén a kétféle spin energiája felhasad $\pm\mu_\mathrm{B}H$ energiával, így a kétféle spincsatorna állapotsűrűsége $\rho_\pm(\varepsilon) = \frac{1}{2}\rho(\varepsilon \mp \mu_\mathrm{B}H)$ lesz. Mutassuk meg, hogy a Pauli-féle paramágneses szuszceptibilitás

$$\chi_\mathrm{P} = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0} = \mu_\mathrm{B}^2 \int \rho'(\varepsilon)\,\overline{n}(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

   Tipp: határozzuk meg a kétféle spinű elektronok $\overline{N}_\pm$ számát, majd ebből az $M = -\mu_B\left(\overline{N}_+ - \overline{N}_-\right)$ mágnesezettséget a $H \to 0$ limeszben!