10. statisztikus fizika gyakorlat

2017. április 24.

1. Lássuk be, hogy ideális kvantumgázban a nagykanonikus potenciál felírható a betöltési szám és az integrált állapotsűrűség segítségével az alábbi módon:

$$\Phi = -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{n}(\varepsilon)\, R(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon,$$

ahol $R(E) = \int_{0}^{E} \rho(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon$ az integrált állapotsűrűség!

2. Mutassuk meg, hogy egy d dimenziós, $\varepsilon(\mathbf{p}) = c\,|\mathbf{p}|^{\gamma}$ diszperziós relációval jellemezhető ideális kvantumgáz állapotegyenlete

$$pV = \frac{\gamma}{d}\overline{E}.$$

3. Határozzuk meg az S spinű ideális kvantumgáz kémiai potenciáljának kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!

4. Határozzuk meg az ultrarelativisztikus S spinű ideális kvantumgáz állapotegyenletének kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Tekintsük egy kvantumos harmonikus oszcillátor sajátállapotait mint független alrendszereket nagykanonikus sokaságban. Határozzuk meg
   (a) a j kvantumszámú állapotra vonatkozó $\mathcal{Z}_j$ nagykanonikus állapotösszeget,
   (b) ebből pedig az adott sajátállapot $\overline{n}_j$ átlagos betöltését
   (c) és $\overline{\varepsilon}_j$ átlagos energiáját!

2. Diszkutáljuk az $n(\varepsilon)$ Fermi-függvény viselkedését valamilyen fix μ kémiai potenciál mellett!
   (a) Határozzuk meg a függvény határértékeit ahogy $\varepsilon \to \pm\infty$.
   (b) Határozzuk meg az $n(\mu)$ függvényértéket!
   (c) Hogy néz ki a függvény a $T \to 0$ limeszben?
   (d) Nagyon alacsony hőmérsékleten mekkora a függvény „szélessége” $\varepsilon = \mu$ körül? Tipp: határozzuk meg az $n = 0.1$ és $n = 0.9$ küszöbértékek közti felfutás energiabeli szélességét a $k_{\mathrm{B}}T \ll \mu$ limeszben!

3. Határozzuk meg a (nemrelativisztikus) S spinű ideális kvantumgáz állapotegyenletének kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest!