Kvantummechanika 1

7. gyakorlat 2023. április 18.

1. Fejezzük ki az $\hat{x}$ és $\hat{p}$ operátorok mátrixát a harmonikus oszcillátor sajátbázisán! Teljesül-e az $[x,p] = i\hbar$ felcserélési reláció a Hilbert-tér véges dimenziós alterén?
Házi feladat: Bizonyítsuk be, hogy a harmonikus oszcillátor megszámlálhatóan végtelen dimenziós sajátbázisán teljesül az $[x,p]_{ik} = i\hbar\,\delta_{ik}$ felcserélési reláció!

2. Bizonyítsuk, hogy impulzus reprezentációban az impulzus operátor az impulzussal való szorzás művelete, a hely operátora pedig $\hat{x} = i\hbar\frac{d}{dp}$!

3. Írjuk fel a harmonikus oszcillátorra vonatkozó időfüggetlen Schrödinger-egyenletet impulzus reprezentációban és lássuk be, hogy a stacionárius állapotok energiája $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$!

4. a) Írjuk fel a homogén elektromos térbe helyezett töltött részecske időfüggetlen Schrödinger-egyenletét koordináta reprezentációban! Vezessük be az $x_0 = \left(\frac{\hbar^2}{2\mathcal{E}qm}\right)^{1/3}$ hosszúság skálát és lássuk be, hogy a Schrödinger-egyenlet átírható az alábbi Airy típusú differenciálegyenletté:

$$\frac{d^2\psi\left(t\right)}{dt^2} + t\psi\left(t\right) = 0 \qquad \left(t = \frac{x}{x_0} + \frac{E}{\mathcal{E}qx_0}\right).$$

b) Mutassuk meg, hogy impulzus reprezentációban a homogén elektromos térbe helyezett töltött részecske Schrödinger-egyenletének a megoldása:

$$\widetilde{\psi}(p) = Ne^{\frac{i}{\hbar\mathcal{E}q}\left(Ep-\frac{p^3}{6m}\right)},$$

ahol N egy normálási faktor!
c) Házi feladat: Lássuk be hogy az állapotfüggvény koordináta reprezentációja, $\psi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\widetilde{\psi}(p)e^{i\frac{p}{\hbar}x} = \psi\left(tx_0 - \frac{E}{\mathcal{E}q}\right)$, teljesíti az Airy-féle differenciálegyenletet!

További házi feladatok:

- Tekintsünk a $t=0$ pillanatban egy Gauss-hullámcsomagot,

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{d\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2d^2}}.$$

  Hogyan változik a megtalálási valószínűségsűrűség az időben potenciálmentes esetben?

- A $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ határozatlansági reláció segítségével mutassuk meg, hogy a harmonikus oszcillátor energiájára teljesül, hogy $E \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$!

- Mekkora lesz a hely és impulzus szórásának a szorzata egy koherens állapotban,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \text{ ?}$$