Kvantummechanika 1

6. gyakorlat 2023. április 4.

1. Bizonyítsuk az alábbi operátor azonosságot,

$$[A, BC] = [A, B]\, C + B\, [A, C] \ .$$

2. Határozzuk meg a Hamilton operátor hely és impulzus operátorral vett kommutátorát!

$$[H, x] = ? \ , \qquad [H, p] = ?$$

3. Mutassuk meg, hogy a Hamilton operátor sajátállapotaiban egy tetszőleges operátor a Hamilton operátorral vett kommutátorának a várható értéke eltűnik:

$$H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle \ , \qquad \langle\varphi|[H, A]|\varphi\rangle = 0$$

4. A $\langle\varphi|[H, xp]|\varphi\rangle = 0$ összefüggés segítségével bizonyítsuk be az ún. viriáltételt:

$$2\langle\varphi|T\varphi\rangle = \langle\varphi|x\frac{dV}{dx}|\varphi\rangle \ .$$

A viriáltétel alkalmazásával bizonyítsuk, hogy harmonikus oszcillátor φ sajátállapotában:

$$\langle\varphi|T|\varphi\rangle = \langle\varphi|V|\varphi\rangle = \frac{E}{2} \ .$$

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és L lineáris operátorokra fennáll az

$$e^L A e^{-L} = A + [L, A] + \frac{1}{2!}\, [L, [L, A]] + \frac{1}{3!}\, [L, [L, [L, A]]] + \ldots$$

azonosság! A fenti összefüggést *Hausdorff-kifejtés*nek hívjuk.

6. a) Határozzuk meg az $x' = x + X$ koordináta eltolás operátorát:

$$f'(x) \equiv f\,(x') = f(x + X) = T(X)\, f\,(x) \ .$$

b) Bizonyítsuk, hogy koordináta eltolás hatására a Hamilton-operátor a

$$H'\,(x) = e^{\frac{i}{\hbar}Xp}\, H\,(x)\; e^{-\frac{i}{\hbar}Xp} = \frac{p^2}{2m} + V\,(x + X)$$

módon transzformálódik!

Házi feladat

- Mutassuk meg, hogy ha $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, akkor fennáll az ún. *Baker-Campbell-Hausdorff* azonosság:

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A\, e^B.$$

- Milyen összefüggés áll fenn a kinetikus energia, a potenciális energia várhatóértéke és az energia között $V(x) = \alpha|x|^\nu$ alakú potenciál esetén a rendszer sajátállapotában? ($\nu, \alpha > 0$ vagy $-2 < \nu < 0$ és $\alpha < 0$) *(Használjuk a viriáltételt!)*

- Legyen $|0\rangle$ egy ω frekvenciájú lináris harmonikus oszcillátor alapállapota és $a_\pm$ a megfelelő léptető operátorok. Bizonyítsa, hogy az $|\alpha\rangle = Ne^{\alpha a_+}|0\rangle$ állapot, ahol N egy normálási konstans, koherens állapot, azaz $a_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ($\alpha \in \mathbb{C}$)! *(Használja a Hausdorff-kifejtést!)* Határozza meg N értékét? *(Az $e^{\alpha a_+}|0\rangle$ állapot normájának meghatározásánál próbálja meg felhasználni a Baker-Campbell-Hausdorff azonosságot!)*