Kvantummechanika 1

3. gyakorlat 2023. március 14.

1. Egy részecske ω körfrekvenciájú egydimenziós harmonikus oszcillátor potenciáljában mozog. A $t = 0$ időpillanatban a körfrekvencia hirtelen kétszeresére nő, $\omega' = 2\omega$. Ezután méréseket végzünk a részecske energiájára.
a) Mi a valószínűsége annak, hogy $E = \frac{\hbar\omega}{2}$ energiát mérünk?
b) Mi a valószínűsége annak, hogy mérés eredménye $E = \hbar\omega$, ha a részecske a $t = 0$ időpillanatban az ω körfrekvenciájú osczcillátor alapállapotában volt?

2. Hogyan módosul az egydimenziós harmonikus potenciálban mozgó q töltésű részecske sajátenergiái, ha $\mathcal{E}$ homogén elektromos térbe helyezzük?

3. A koherens állapotokat a lineáris harmonikus oszcillátor lefelé léptető operátorának sajátállapotaiként definiáljuk:

$$a_-\varphi_\alpha(x) = \alpha\varphi_\alpha(x)$$

a) Lássuk be, hogy a koherens állapot hullámfüggvénye,

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha x_0)^2}{2x_0^2}\right) .$$

Milyen értékeket vehet fel az α paraméter? Van-e (normálható) sajátfüggvénye a felfelé léptető operátornak?
b) Bizonyítsuk, hogy $\varphi_\alpha(x,t)$ is koherens állapot:

$$a_-\varphi_\alpha(x,t) = \alpha\,(t)\,\varphi_\alpha(x)\ ,$$

ahol $\alpha\,(t) = \alpha e^{-i\omega t}$.

Házi feladat

- A léptetőoperátorok használatával bizonyítsuk a Hermite-polinomok rekurziós összefüggéseit és határozzuk meg a Hermite-polinomok differenciálegyenletét!
- Számítsuk ki a valószínűségi áramsűrűséget a $\varphi_\alpha\,(x,t)$ koherens állapotban!
- Határozzuk meg az $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ várhatóértékeket, valamint a $\sigma_x\sigma_p$ értékét a φ_α koherens állapotokban! Mekkora a $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ potenciális energia, a $T = \frac{p^2}{2m}$kinetikus energia és az $E = T + V$ energia várhatóértéke?
- Kezdetben ($t < 0$) egy $\alpha\omega$ körfrekvenciájú harmonikus oszcillátor alapállapotban van. A $t = 0$ időpontban az oszcillátor körfrekvenciája ω-ra változik. Milyen valószínűséggel mérhetünk $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ energiát az átkapcsolás után ($t > 0$)?