Kvantummechanika 1

2. gyakorlat 2023. március 7.

1. Bizonyítsuk, hogy az egydimenziós időfüggetlen Schrödinger-egyenlet normált megoldásai

   a) nemdegeneráltak,

   b) mindig választhatók valós függvénynek!

2. Tekintsünk egy végtelen magas potenciálgödörben mozgó részecskét:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases} .$$

   Legyen a hullámfüggvény a $t = 0$ időpillanatban

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right)$$

   a) Igazoljuk, hogy ψ normája 1!

   b) Határozzuk meg az időfüggő $\psi(x,t)$ hullámfüggvényt és a $\varrho(x,t)$ megtalálási valószínűségsűrűséget!

   c) Számítsuk ki a részecske helyének $\langle x \rangle$ várhatóértékét!

3. Az ω körfrekveniájú lineáris harmonikus oszcillátor ψ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ stacionárius állapotainak energiái $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Az $\hat{a}_\pm = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\hat{x}}{x_0} \mp i\frac{\hat{p}}{p_0})$ $\left(x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, p_0 = \sqrt{m\hbar\omega}\right)$ léptetőoperátorok hatása a normált sajátállapotokra:

$$\hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \quad \hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} .$$

   Határozzuk meg az $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ várhatóértékeket, valamint a $\sigma_x\sigma_p$ értékét a ψ_n állapotokban! Mekkora a $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ potenciális energia és a $T = \frac{p^2}{2m}$kinetikus energia várhatóértéke?

Házi feladat

- Legyen $\psi_1(x)$ és $\psi_2(x)$ az egydimenziós időfüggetlen Schrödinger-egyenlet két különböző energiához tartozó normált megoldása! Bizonyítsuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx = 0 .$$

David J. Griffiths: Introduction to Quantum Mechanics (2nd edition)

- 30. oldal 2.1(c) feladat

  Legyen a potenciális energia páros függvény, $V(-x) = V(x)$! Bizonyítsuk, hogy az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet normált megoldásai szigorúan páros vagy páratlan függvények!

- 35. oldal 2.2 példa

  A végtelen magas potenciálgödörben mozgó részecske normált hullámfüggvénye a $t = 0$ időpillanatban $\psi(x,0) = Ax\,(a-x)$. Határozzuk meg az A konstanst és a $\psi(x,t)$ hullámfüggvényt!

- 38. oldal 2.4 feladat

  Számítsuk ki az $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ várhatóértékeket a végtelen potenciálgödör stacionárius állapotaiban? Mi a $\sigma_x\sigma_p$ értéke ezen állapotokban?

- 50. oldal 2.13 feladat

  A lineáris harmonikus oszcillátor első gerjesztett állapotának hullámfüggvénye $\psi_1(x) = \hat{a}_+\psi_0(x)$, ahol $\psi_0(x)$ az alapállapoti hullámfüggvény. Tekintsük a $\psi(x,t)$ normált hullámfüggvényt, mely a $t = 0$ időpillanatban

  $$\psi\,(x,0) = A\,(3\psi_0\,(x) + 4\psi_1(x))\ .$$

  a) Határozzuk meg az A normálási konstanst!

  b) Írjuk fel az időfüggő $\psi(x,t)$ hullámfüggvényt és a $\varrho(x,t)$ megtalálási valószínűségsűrűséget!

  c) Mik az $\langle x\rangle$ és $\langle p\rangle$ várhatóértékek? Teljesül a $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle p\rangle$ első Ehrenfest-tétel?

  d) Igazoljuk, hogy $m\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = -m\omega^2\langle x\rangle$! (második Ehrenfest-tétel)