Példák: Magnetosztatika, mágneses anyagok

I. KÖNYVTÁMASZ ALAKÚ HUROK MÁGNESES DIPÓLMOMENTUMA

Adott az ábrán látható vezető alakzat (hurok), amelynek minden éle w hosszúságú. A hurokban I áram folyik. Határozza meg az áramvonal mágneses dipólmomentumát!

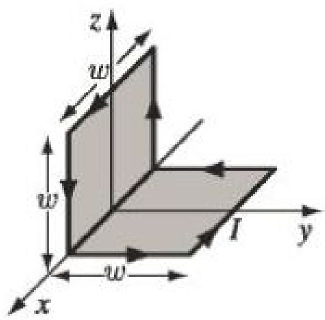

FIG. 1.

II. MÁGNESEZETT GÖMB

Adott egy R sugarú gömb. amelyben homogén és állandó $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ mágnesezettségű permanens mágneses anyag van (ún.: "gömbmágnes"). Ennek mágneses tere ismert.

A gömbön belül (legyen ez a 2-es tartomány):

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{M}, \qquad \mathbf{B}_2 = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M}. \tag{1}$$

A gömbön kívül (legyen ez az 1-es tartomány) a mágneses skalár potenciál egy $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ pontszerű dipólus terével adható meg, azaz

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{m\cos\theta}{r^2}. \tag{2}$$

Ahol (r, θ, ϕ) gömbi koordináták. Valamint

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{M}. \tag{3}$$

1. Helyezzük el ezt a gömbmágnest egy $\mathbf{B_0} = \mu_0\mathbf{H_0} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ homogén mágneses térbe úgy, hogy az $\mathbf{M}$ ne változzon meg (permanens mágnesről van szó)! Határozzuk meg az eredő $\mathbf{B}$-t és a $\mathbf{H}$-t a gömb belsejében!

2. Legyen most a gömbmágnes anyaga egy lineárisan mágnesezhető anyag, azaz amelyre igaz, hogy $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$. Az első kérdésre adott válasz ismeretében határozza meg az $\mathbf{M}$ és a $\mathbf{B_0}$ közötti kapcsolatot!
Megjegyzés: A kapott összefüggés elektroszatikus analógiájával már találkoztunk a Clausius-Mosotti egyenlet tárgyalásakor.

3. Vizsgáljuk meg, hogy a második kérdésben tárgyalt elrendezésnél mi a kapcsolat a gömbmágnes belsejében lévő $\mathbf{B}$ és a $\mathbf{B_0}$ között paramágneses és diamágneses anyag esetén! Vázoljuk fel a mágneses indukcióvonalakat!

4. Adjuk meg a felületi polarizált áramokat és a vektorpotenciált is az első esetben!

III. MÁGNESEZETTT HENGER

Adott egy z irányban végtelen hosszú, R sugarú henger, amelyen belül a mágnesezettség:

$$\mathbf{M} = M_0\frac{r^2}{R^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

a hengeren kívül a mágnesezettség zérus.

1. Határozza meg a mágnesezettségből a kötött áramsűrűséget mindenhol a térben!

2. Határozza meg a hengeren átfolyó kötött áram nagyságát!

3. Adja meg az integrális Ampere-törvényt a kötött áramra!

4. A kapott egyenlet alapján adja meg a mágneses indukció vektort mindenhol a térben!

5. Határozza meg a vektorpotenciált Coulomb-mértékben mindenhol a térben!

IV. SÍKLAP ÉS DIPÓLUS

Egy $2a$ vastagságú síklapban $\mathbf{J} = 2J_0\hat{\mathbf{z}}$ áram folyik. A síklapot felezi az yz sík, azaz $x = -a$ és $x = a$ síkok között van. Egy mágneses dipólus $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{x}}$ van az origóban.

1. Határozza meg a dipólusra ható erőt!

2. Határozza meg a dipólusra ható erőt, ha a dipólmomentum $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$!

3. Az elektrosztatikus esetben $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$ és $\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}$ ekvivalensek, de ez nem igaz a mágneses analógjukra. Miért? Számolja ki a $(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}$ kifejezést a fenti két esetre!

V. DIAMÁGNESESSÉG NAÍV MODELLJE

Vegyük egy elektron pályáját az atommag körül körpályának. Az elektront magát vegyük egy köráramnak:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}, \tag{4}$$

azaz a pályához rendelhető dipólmomentum

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2} evR\hat{\mathbf{z}}. \tag{5}$$

A keringő elektronra hat az atommag vonzereje, azaz

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R}. \tag{6}$$

Ha az anyagot mágneses térbe helyezzük, egy további erő, a Lorentz erő is hat az elektronra, így

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\tilde{v}B = m_e\frac{\tilde{v}^2}{R}, \tag{7}$$

ahol $\tilde{v}$ a mágneses erő hatására módosult sebesség.

1. Mutassa meg, hogy ha $\Delta v = \tilde{v} - v$, akkor

$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e}. \tag{8}$$

   Írja fel a dipólmomentum változását ($\mathbf{\Delta m}$) is, a mágneses tér ($\mathbf{B}$) függvényében!

2. A fenti modell alapján adjon egy becslést a réz szuszceptibilitására (χ_m)! A mért érték $\chi_m = -9.7 \times 10^{-6}$, *Handbook of Chemistry and Physics*, 67th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1986).

Megoldás:

1. Elektronok köráramа, mint klasszikus részecskék körmozgása, $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$, amihez $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\mathbf{z}}$, míg a keringő elektronra ható vonzóerő az atommag által $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R}$, amihez még a Lorentz erő is társulhat, összességében a következőt adva:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\tilde{v}B = m_e\frac{\tilde{v}^2}{R} \tag{9}$$

   A mágneses tér nélküli sebesség könnyedén megadható $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 Rm_e}}$, míg $\tilde{v}$ a következőképpen adható meg egy másodfokú egyenlet megoldásaként:

$$\tilde{v} = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{eBR}{2m_e}^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 Rm_e}} \approx \frac{eBR}{2m_e} + \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 Rm_e}}, \tag{10}$$

   ahonnan $\Delta v \approx \frac{eRB}{2m_e} \Rightarrow \mathbf{\Delta m} = -\frac{1}{2}e\Delta vR\hat{\mathbf{z}} = -\frac{e^2BR^2}{4m_e}\hat{\mathbf{z}}$.

2. Ehhez szükségünk van a réz anyagsűrűségére, ami $\mathcal{N} \approx 10^{30}\ 1/m^3$, ahonnan $\Delta\mathbf{M} = \mathcal{N}\mathbf{m} \Rightarrow \chi_m \sim \mu_0\mathcal{N}\mathbf{\Delta m} \sim \mu_0\mathcal{N}\frac{e^2R^2}{m_e}$, ahol $R \sim 1,35\,10^{-10} \Rightarrow \chi_m \sim 5 \times 10^{-6}$.