Példák: Elektromos terek anyag jelenlétében

I. SZIGETELŐ GÖMB EGYENLETES TÖLTÉSELOSZLÁSSAL (A TÍPUSÚ)

Egy lineáris dielektrikumból készült gömbben egyenletes ρ sűrűségű töltéseloszlás van. Számolja ki a potenciált a gömb középpontjában, ha a gömb sugara R és a permittivitása ϵ!

II. VASTAG GÖMBHÉJ (A TÍPUSÚ)

Adott egy vastag gömbhéj, belső sugara a, külső sugara b, mely radiális irányban polarizált,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r}\hat{\mathbf{r}}, \tag{1}$$

ahol k egy konstans. Vezesse le az elektromos teret a három különböző térfogatban a következő módokon:

1. Alkalmazza az elektromos eltolás-vektorra érvényes Gauss-törvényt, és az így kapott eltolás-vektorból számolja ki az elektromos teret!
2. Számolja ki a kötött töltéseket, és azok alapján számolja ki az elektromos teret!

III. FÉLIG TÖLTÖTT SÍKKONDENZÁTOR (A TÍPUSÚ)

Adott egy síkkondenzátor, amelyben a fémlapok d távolságra vannak egymástól. A lapok négyzetalakúak, és egy oldaluk L hosszúságú. $L \gg d$. Emellett van elég ϵ permittivitású szigetelő anyagunk, hogy a kondenzátor felét megtöltsük. Számoljuk ki a kapacitást, ha a szigetelő anyagot, ha

1. a szigetelőt úgy helyezzük a síkkondenzátorba, hogy az egyik lapot teljesen szigetelő anyag fedi, és a d hosszúság feléig tölti be a fémlapok közötti térfogatot!
2. a szigetelőt úgy helyezzük a síkkondenzátorba, hogy mindkét lapból egy $L \times L/2$ felületet szigetelő fed (0-tól d-ig), a kondenzátor másik felében nincs szigetelő.

IV. EGYENLETESEN POLARIZÁLT GÖMB POTENCIÁLJA (B TÍPUSÚ)

Számolja ki egy egyenletesen polarizált R sugarú gömb potenciálját a

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \tag{2}$$

egyenlet segítségével.

V. TÖLTÉSELOSZLÁS RELAXÁCIÓJA (B TÍPUSÚ)

Egy R sugarú gömböt homogén σ vezetőképességű és ϵ dielektromos állandójú anyag tölt ki. A gömbben kezdetben ($t = 0$) egyenletes ρ_0 térfogati töltéssűrűség van. Az idő múlásával a gömben lévő töltéselrendezés felveszi az elektrosztatikus egyensúlyi töltéssűrűséget.

1. Írja fel a szükséges (kontinuitási) egyenlete(ke)t!
2. A töltés kontinuitási egyenletéből származtasson differenciálegyenletet a töltéssűrűség időfüggésére! (Útmutatás: használja a $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ és $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ összefüggéseket!)
3. Az adott kezdeti feltétel alapján határozza meg a $\rho(r,t)$, $\mathbf{E}(r,t)$ és $\mathbf{j}(r,t)$ függvényeket! Ábrázolja az időfüggést!
4. Megmarad-e a térfogatban az össztöltés? Hogyan lehet ez?
5. Határozza meg a rendszer egyensúlyi állapotát!

VI. TALAJBA ÁSOTT FÉLGÖMBÖK (B TÍPUSÚ)

Adott két darab, fémből készült, tömör, (R sugarú) félgömb. A félgömböket elássuk a talajba úgy, hogy a sík felületük a vízszintes talajjal egy szintben legyenek. A félgömbök tengelyei egymástól $D \gg R$ távolságra vannak. A fém végtelen jó vezető, a talaj vezetőképessége mindenhol σ. Keressük a a két félgömb közötti elektromos ellenállást.

1. Keresse meg azt az elektrosztatikai elrendezést, amelyiknek a $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ tere megfelel a földben folyó $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűségnek!
2. Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés $\Phi(\boldsymbol{r})$ potenciálját az R/D arány elsőrendű közelítésében!
3. Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés C kapacitását!
4. Határozza meg a (szóban forgó közelítésben) a két félgömb között mérhető elektromos ellenállást!

VII. TALAJBA SZÚRT FÉMRÚD (B TÍPUSÚ)

Adott egy $2b$ átmérőjű fémrúd, amelynek a hossza $L \gg b$. A rudat (a vízszintes talajszintre merőlegesen) félig beszúrjuk a talajba. Keressük az elrendezés földelési ellenállását. A fémrúd végtelen jó vezető, a talaj vezetőképessége mindenhol σ. A rúd egy forgási ellipszoiddal közelíthető.

1. Keresse meg azt az elektrosztatikai elrendezést, amelyiknek a $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ tere megfelel a földben folyó $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűségnek!

2. Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés $\Phi(\boldsymbol{r})$ potenciálját!

3. Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés C kapacitását!

4. Határozza meg a (szóban forgó közelítésben) fémrúd földelési ellenállását!

További gyakorlásra

VIII. KOAXIÁLIS KÁBEL

Egy koaxiális kábel a következő összetevőkből áll: egy rézből készült, a sugarú tömör henger, amelyet egy c sugarú henger vesz körül ($c > a$). Az a és c közötti üreget b-től c-ig egy ϵ permittivitású anyag tölti ki. Számolja ki az egységnyi hosszra eső kapacitást!

IX. FÉMGÖMB FOLYADÉKBAN

Adott egy R sugarú fémgömb, a melyen Q töltés van. A gömb egy olyan folyadékba merül, amelyben $\boldsymbol{E}$ elektromos tér hatására $\rho(\boldsymbol{r})$ töltéseloszlás keletkezik. Ez a töltéseloszlás az adott helyen lévő $\Phi(\boldsymbol{r})$ elektromos potenciállal arányos, azaz $\rho(\boldsymbol{r}) = -k\Phi(\boldsymbol{r})$. Tudjuk, hogy $\Phi(r \to \infty) = 0$.

1. Írja fel a Poisson egyenletet a jelen elrendezés esetére gömbkoordinátákban! Függ-e a megoldás a szögektől?

2. Vezesse be a $\Psi(r) = r\Phi(r)$ függvényt és oldja meg a kapott differenciálegyenletet!

3. Határozza meg a $\Phi(r)$ potenciált és a $\boldsymbol{E}(r)$ térerősséget!

4. Határozza meg a $\boldsymbol{D}(r)$-t és a $\boldsymbol{P}(r)$-t és az indukálódott $\rho_P(r)$ polarizációs töltéssűrűséget!

X. SEMLEGES SZIGETELŐ

Felhasználva a

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad , \quad \rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{3}$$

kifejezéseket igazolja, hogy szabad töltések hiányában egy dielektrikum teljes töltése nulla!

XI. HOSSZÚ POLARIZÁLT HENGER

Adott egy nagyon hosszú henger, a sugárral, amely a tengelye mentén polarizált. Számolja ki a teret a hengeren kívül és belül!

XII. $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{P}$ ERŐVONALAK

1. Egy a sugarú, L hosszúságú henger egyenletesen polarizált ($\mathbf{P}$). A polarizáció a tengellyel párhuzamos. Számolja ki a kötött töltést, és vázolja fel az elektromos teret ha (i) $L >> a$, ha (ii) $L << a$, és ha (iii) $L \approx a$!

2. Elektrétekben igaz, hogy

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = Q_{sz}, \tag{4}$$

ahol Q_{sz} a felület által bezárt töltés. Következik-e ebből, hogy

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \tag{5}$$

azaz, érvényes-e Coulomb törvénye az eltolási vektorra? (Segítség: mi a $\mathbf{D}$ eltolási vektor rotációja?)

3. Az fent tárgyalt henger esetében nincs szabad töltés. Következik-e ebből, hogy $\mathbf{D}$ mindenhol nulla? Miért vagy miért nem?

4. Az fent tárgyalt henger esetében hol nem nulla a $\nabla \times \mathbf{P}$?

5. Vázolja fel a henger esetére a $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ vonalakat (három különböző rajzon). [Segítség: az $\mathbf{E}$-vonalak töltéseken kezdődnek/végződnek, a $\mathbf{D}$-vonalak *szabad* töltéseken kezdődnek/végződnek.]