

Példák: Multipólsorfejtés és kapacitás

I. GÖMB TÉRFOGATI TÖLTÉSELOSZLÁSSAL

Adott egy R sugarú gömb, amelynek középpontja az origó. A gömb térfogatán

$$\rho(r, \theta) = k \frac{R}{r^2} (R - 2r) \sin \theta \quad (1)$$

töltéseloszlás van, ahol k egy állandó, r és θ a szokásos gömbkoordináták. Vezesse le ennek a töltéseloszlásnak a potenciálját a z -tengelyen az origótól nagy távolságra!

(Segítség: Vegyük észre, hogy a töltéselrendezés henger-szimmetrikus, ami a dipól- és kvadrupólmomentumok számolását leegyszerűsíti.)

II. NÉGY RÉSZECSCKE POTENCIÁLJA

Négy részecskét a következőképpen helyezzük el: q töltést a $(0, -a)$ pontra, $3q$ töltést a $(0, a)$ pontra, $-2q$ töltést a $(a, 0)$ pontra, és $-2q$ töltést a $(-a, 0)$ pontra. Vezessen le egy egyszerű közelítő potenciált, ami az origótól nagy távolságra érvényes!

III. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL

Legyen $\rho_1(\mathbf{r})$ egy töltéseloszlás, amely $\Phi_1(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. Továbbá legyen $\rho_2(\mathbf{r})$ egy másik töltéseloszlás, amely $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciált hoz létre. A két töltéseloszlás vagy nem egyidőben létezik, vagy térben egymástól nagyon messze vannak, azaz, a $\rho_1(\mathbf{r})$ töltéseloszlásnak nincs hatása a $\Phi_2(\mathbf{r})$ potenciálra sem vice versa.

Bizonyítsa be a Green-féle reciprocitási tételt, azaz

$$\int \rho_1(\mathbf{r}) \Phi_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \rho_2(\mathbf{r}) \Phi_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2)$$

IV. GREEN RECIPROCITÁSI TÉTEL ALKALMAZÁSAI

1. Tegyük fel, hogy van két elkülönített vezető, a és b . Ha az a vezetőre Q töltést helyezünk, úgy, hogy a b semleges marad, akkor a b -nek potenciálja lesz, jelöljük V_{ab} -vel. Ha viszont b -re teszünk Q töltést, akkor az a -nak lesz potenciálja, ezt jelöljük V_{ba} -val. A Green reciprocitási tétel alkalmazásával mutassa meg, hogy $V_{ab} = V_{ba}$! (Ez az eredmény a vezetők alakjától független.)
2. Adott két földelt, koncentrikus fémgömb, sugaruk $a < b$. q töltést helyezünk a központtól r távolságra, úgy, hogy $a < r < b$. Mekkora a teljes indukált töltés a két gömbön?

V. POTENCIÁL- ÉS KAPACITÁSEGYÜTTHATÓK

A térben N darab fémtest helyezkedik el. Ezeken rendre Q_i töltés van és ennek megfelelően a potenciáljuk Φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). A Maxwell egyenletek linearitása miatt írható, hogy

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \sum_j p_{ij} Q_j \\ Q_i &= \sum_j c_{ij} \Phi_j, \end{aligned} \quad (3)$$

ahol p_{ij} , c_{ij} a potenciál- és a kapacitásegységütthetők.

1. A rendszer összenergiájának felírásával mutassa meg, hogy a p_{ij} és a c_{ij} mátrixok szimmetrikusak!
2. Legyen $N = 3$. A c_{ij} adatok ismertek. Algebrai "bővítéssel" írja az egyenleteket

$$Q_i = \sum_{k=0}^N C_{ik} (\Phi_i - \Phi_k), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

alakba, ahol Φ_0 a Föld (végtelen távoli pont) potenciálja! A C_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) neve "főkapacitás", a C_{i0} ($i = 1, 2, 3$) "földkapacitás" vagy "szórt kapacitás". Együttes nevük "részkapacitás". Rajzoljon ún. áramköri modellt!

3. Írja fel a rendszer energiáját a C_{ik} részkapacitások segítségével!

VI. GÖMBÖK KAPACITÁS-MÁTRIXA

Adott két, R_1 és R_2 sugarú fémgömb. A középpontjaik távolsága legyen $a \gg R_1, R_2$. Mivel az a sokkal nagyobb a gömbök sugaránál, ezért jó közelítéssel a Q_1 töltés elektromos potenciálja az R_2 gömbfelületen mindenhol $Q_1/(4\pi\epsilon_0 a)$ -nak vehető és ugyanez fordítva is igaz.

1. Írja fel a p_{ij} mátrixot erre az esetre!
2. A p_{ij} mátrix ismeretében határozza meg a c_{ij} kapacitás együtthetők mátrixát!
3. Határozza meg a C_{12} főkapacitást és a C_{10} , C_{20} szórt (föld-) kapacitásokat!

VII. ÁTLAG ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG GÖMBÖN BELÜL

Mutassa meg, hogy egy R sugarú gömbön belül, a gömbön belül található töltésekből eredő átlagos elektro-

mos térerősség:

$$\mathbf{E}_{\text{átlag}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3}, \quad (5)$$

ahol \mathbf{p} a teljes dipólmomentum. Ezt az eredményt például a következő lépéseket követve lehet bebizonyítani:

1. Mutassa meg, hogy az átlag elektromos tér a gömbön belül, amelyet egy az \mathbf{r} -pontban lévő q töltés hoz létre, az ugyanaz, mint amit egy $\rho = -q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ töltésselosztás hoz létre az \mathbf{r} pontban.
2. A fenti ρ töltésselosztás terét ki lehet számolni a Gauss tétel segítségével is. Ebben az eredményben szerepel a q töltés dipólmomentuma is; írja át a (??) alakba!
3. A szuperpozícióelv segítségével általános töltésselrendezésre is megkapjuk a kívánt eredményt.

VIII. A DIPÓLUS SZINGULARITÁSA

Tudjuk, hogy egy "tisztá" dipólus elektromos tere

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]. \quad (6)$$

1. Számolja ki egy z irányba mutató, az origóban lévő dipólus átlag elektromos terét egy R sugarú gömbön belül és vesse össze a (??) egyenlettel!

A különbség abból adódik, hogy a dipólus elektromos tere az origóban divergál. A szögintegrál nulla, viszont a radiális integrál végtelen, így nem egyértelmű az eredmény. A paradoxon megoldása, hogy a (??) egyenlet alapján kapott eredményt csak egy dipólus körüli ϵ sugarú gömbön kívül tekintjük érvényesnek, ez a kontribúció egyértelműen nulla, viszont a teljes eredmény ((??) egyenlet) a gömbön belüli járulékból ered.

2. Milyenek kell lennie a gömbön belüli térnek, hogy kijöjjön az előző példában talált eredmény? (Válasz: egy $-(\mathbf{p}/3\epsilon_0)\delta(\mathbf{r})$ plusz járulékot kell tartalmazni.)