Példák: Laplace egyenlet, változószeparáció

I. POTENCIÁL FÖLDELT FÉMLAPOK KÖZÖTT (A TÍPUSÚ)

1. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $y = 0$-nál, a másik $y = a$-nál, helyezkedik el. A bal végüket, $x = 0$-nál, lezárja egy végtelen hosszú szalag, amely a két fémlaptól elszigetelt, és amelynek a potenciálja V_0 konstans. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)

2. Egy végtelen hosszú téglalap-alapú fémcső (a téglalap oldalai a és b) egyik végén ($x = 0$) egy kis téglalap alakú szigetelő a potenciált $V_0(y, z)$ értéken tartja. Az a hosszúságú oldal a z-tengelyen, a b-hosszúságú pedig az y tengelyen helyezkedik el. Számolja ki a potenciált a három felület által közrezárt térfogaton ha $V_0(y, z) = V_0$ állandó. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)

3. Egy kocka, melynek élei a hosszúságúak, öt oldala földelt fémből van. Az öt oldal össze van forrasztva. A hatodik oldal, (a teteje) nincs össszeforrasztva a többivel (egy vékony réteg szigetelő választaja el a vele érintkező négy oldaltól), és V_0 a potenciálja. Számolja ki a potenciált a kocka belsejében!

II. POTENCIÁL FÖLDELT FÉMLAPOK KÖZÖTT (B TÍPUSÚ)

1. Két végtelen hosszú földelt fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $y = 0$-nál, a másik $y = a$-nál, helyezkedik el. További két végtelen hosszú fémlap egymással párhuzamosan, az egyik $x = -b$-nél, a másik $x = b$-nél, helyezkedik el. Ezen fémlapok potenciálja V_0. Számolja ki a potenciált a négy fémlap által közrezárt térfogatban. (Javaslat: először rajzolja le a rendszert.)

2. Az előző feladat esetében számolja ki az $x = -b$ szalagon lévő töltéssűrűséget, ha a potenciál V_0 állandó!

III. LAPLACE-EGYENLET GÖMBKOORDINÁTÁKBAN (B TÍPUSÚ)

Gömbkoordinátákban a Laplace egyenlet formája

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0. \tag{1}$$

Azimutális szimmetria esetén nincs ϕ-függés. Ebben az esetben a megoldás felírható

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \tag{2}$$

alakban.

- Mutassa meg, hogy az

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{3}$$

a radiális rész általános megoldása.

A θ-függő rész általános megoldásai a Legendre polinomok, $\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$. Az első néhány Legendre polinom:

$$P_0(x) = 1 \tag{4}$$
$$P_1(x) = x \tag{5}$$
$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 \tag{6}$$
$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2. \tag{7}$$

A Legendre polinomokra igaz, hogy

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}. \tag{8}$$

1. Adott egy R sugarú gömbhéj, amelynek a felületén a potenciál $\Phi_0(\theta)$. Határozza meg a potenciált a gömbön belül!

2. Adott egy R sugarú gömbhéj, amelynek a felületén a potenciál $\Phi_0(\theta)$. Határozza meg a potenciált a gömbön kívül!

3. Adott egy semleges R sugarú fémgömb, amelyet $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ (homogén) külső elektromos térbe helyezünk. Határozza meg a potenciált a gömbön kívül! (Segítség: csak a $P_0(x)$ és a $P_1(x)$ Legendre polinomokra van szükség.)

További gyakorlásra

IV. LAPLACE-EGYENLET MEGOLDÁSA KONFORM LEKÉPEZÉS MÓDSZERREL

A. Bevezetés: A konform leképezés fogalma

Adott a komplex sík, ahol $z = x + iy$. A

$$z' = u(x, y) + iv(x, y) \tag{9}$$

egy transzformáció. Ha z' valamilyen D régióban analitikus, akkor az ilyen transzformációkat konform leképezésnek nevezzük. Egy komplex leképezés az eredeti x, y (vagy z) komplex síkról az u, v (vagy z') komplex síkra képez pontokat. A D régión belül minden egyes x_0, y_0 pontnak van egy u_0, v_0 megfelelője. Minden egyes x, y síkon felvett görbének is van egy megfelelő görbéje az u, v-síkon. Ha két x, y-síkon felvett görbe metszi egymást, akkor a konform leképezett görbék az u, v-síkon is metszeni fogják egymást.

A transzformáció

$$z' = \frac{1}{z} \tag{10}$$

egy **konform leképezés** a komplex síkon, kivéve a $z = 0$ ponton. Konkrétan ezt a transzformációt **inverziónak** nevezik. Ez a leképezés egy x, y-síkon felvett kört az u, v-síkon vagy körre, vagy egy egyenes vonalra képez.

- Bizonyítsa be ezt az állítást! Mutassa meg, hogy a z-síkon definiált

$$|z - a| = r, \tag{11}$$

kifejezés, ahol $a = a_x + ia_y$, r egy valós szám, megfelelője a z' síkon a $|a| \neq r$ esetre

$$|z' - A| = R, \tag{12}$$

ahol

$$A = \frac{a}{|a|^2 - r^2} \tag{13}$$

$$R = \left| \frac{r}{|a|^2 - r^2} \right|. \tag{14}$$

- Bízonyítsa, hogy az $|a| = r$ esetben a $|z - a| = r$ megfelelője a z' síkon a

$$2\mathrm{Re}(az') - 1 = 0. \tag{15}$$

A konform leképezés sokszor segíthet a két-dimenziós Laplace-egyenlet megoldásában. Adott egy geometria, amely első látásra nehéznek tűnik, de gyakran egy konform leképezés a problémát egy sokkal egyszerűbb geometriává alakítja át.

Mielőtt rátérünk a konform leképezés alkalmazására, néhány általános megjegyzés a kétdimenziós Laplace-egyenlettel kapcsolatban.

Adott egy potenciál $U(x, y)$, amelyből levezethető az elektromos tér $\mathbf{E}(x, y) = -\nabla U(x, y)$. A Laplace egyenlet ebben az esetben,

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

A konform leképezés csak analitikus függvényekre alkalmazható, azaz olyan függvényekre, amelyekre érvényesek a Cauchy-Riemann feltételek. Ezért érdemes az $U(x, y)$ függvényhez hozzárendelni egy másik $V(x, y)$ függvényt, amelyek kielégítik a Cauchy-Riemann feltételeket, azaz

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \tag{17}$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}. \tag{18}$$

A teljes komplex potenciál formája

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y). \tag{19}$$

- Számolja ki az elektromos teret a $V(x, y)$ függvényében.

B. Alkalmazás: Két szomszédos (nem koncentrikus) henger

Adott két r-sugarú henger. A két henger középpontja a $(c, 0)$ és a $\left(-\frac{r^2}{c}, 0\right)$ pontokban vannak és $c > r$. A $(c, 0)$ középpontú henger felületén a potenciál U_1 (konstans), a $\left(-\frac{r^2}{c}, 0\right)$ középpontúén pedig U_2 (konstans).

- Mutassa meg, hogy a

$$z' = \frac{1}{z} \tag{20}$$

transzformáció után a két henger koncentrikus lesz! Határozza meg a két henger sugarát!

- Vegye fel a potenciált $F(z') = A \ln z' + B$ alakban. Határozza meg az A és B paramétereket! (Segítség: Az $F(z')$ valós része a két henger sugarán U_1 illetve U_2.)

- Írja fel a potenciált az eredeti z-síkban is.