Példák: Töltéseloszlás energiája, ponttöltés fogalma

FOLYTONOS TÖLTÉSELOSZLÁS ENERGIÁJA (ÓRAI ANYAG ISMÉTLÉSE)

Véges térrészben lokalizált folytonos töltéseloszlás esetén a töltéseloszlás létrehozásához szükséges munkát felírhatjuk a

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{V}} \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \tag{1}$$

alakban. A differenciális Gauss-tétel, és a elektromos tér és a potenciál közötti összefüggés segítségével W átalakítható a

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_{\mathbb{V}} E^2 d\mathbf{r} + \oint_{\mathbb{F}} \Phi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \right), \tag{2}$$

alakra. A $\mathbb{V}$ és a $\mathbb{F}$ kifejezések térfogati és felületi integrálokat jelölnek. A felülettel a végtelenhez tartva, a térfogati integál az egész térre kiterjed, míg a felületi járulék nullához tart.

I. GÖMBSZIMMETRIKUS FOLYTONOS TÖLTÉSELOSZLÁS ENERGIÁJA

Adott egy q töltésű homogén eloszlású, R sugarú gömb. Számolja ki ennek a rendszernek az energiáját négyféleképpen!

- A (1) egyenlet alapján.
- A (2) egyenlet alapján, ha a felület a végtelenben van.
- A (2) egyenlet alapján, ha a felület egy a sugarú gömb amely az eredeti R sugarú gömbbel koncentrikus és $a > R$.
- A gömböt gömbhéjonként építjük fel, úgy, hogy minden héjon dq mennyiségű töltést kenünk szét. Mennyi munkát vegzünk, ha a "szétkenés" által a gömb sugara dr-rel növekszik? Integrálja az így kapott mennyiséget, azaz számítsa ki az R sugarú, q töltésű gömb által tárolt energiát!

Mi történik az elektromos térrel és potenciállal a gömbön belül és kívül, illetve a rendszer energiájával az $R \to 0$ határesetben, ha a q töltés közben állandó marad?

II. TÖLTÉSELOSZLÁS POTENCIÁLBÓL

Egy töltéskonfiguráció potenciálja

$$\Phi(\mathbf{r}) = A \frac{\exp(-\lambda r)}{r}, \tag{3}$$

ahol A és λ konstansok.

- Számolja ki az elektromos teret ($\mathbf{E}(\mathbf{r})$), a töltéseloszlást ($\rho(\mathbf{r})$), és a teljes töltést (Q)!
- Ellenőrizze és egészítse ki a kapott töltéseloszlást az integrális Gauss-tétel segítségével!
- Számolja ki a rendszer energiáját és vizsgálja meg a rendszer stabilitását!

III. TÖLTÉS VEZETŐN BELÜLI ÜREGBEN

Adott egy semleges, R sugarú fémgömb, melyben egy üreg található. Az üreg nem tartalmazza a gömb középpontját, viszont tartalmaz egy q nagyságú töltést az origótól a távolságra. Mi az elektromos tér a gömbön kívül? Miért nem függ az üreg alakjától vagy elhelyezkedésétől?

IV. ELEKTROMOS TÉR → TÖLTÉSSŰRŰSÉG

Adott a következő elektromos tér:

$$E_x = ax, E_y = 0, E_z = 0, \tag{4}$$

ahol a egy konstans. Mi a $\rho(\mathbf{r})$ töltéssűrűség? Mi a magyarázata annak, hogy az elektromos tér anizotróp, de a töltéssűrűség homogén?

V. DIRAC δ-FÜGGVÉNY ELŐÁLLÍTÁSA

A Dirac δ-függvény előállítható reguláris $D(x)$ függvények határértékeként:

$$\delta(x) = \lim_{a \to \infty} D_\alpha(x), \tag{5}$$

ahol

$$D_\alpha(x) = \alpha D(\alpha x), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx = 1.$$

1. Mutassa meg, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_\alpha(x) dx = 1, \quad \forall \alpha \in (0, \infty). \tag{6}$$

2. Mutassa meg a határértéket felhasználva, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \tag{7}$$

3. Igazolja, hogy a következő függvények az $\alpha \to \infty$ limeszben úgy viselkednek mint a Dirac δ-függvény.

$$D_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2\alpha} \\ \alpha, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2\alpha} \\ 0, & x > \frac{1}{2\alpha} \end{cases} \tag{8}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\alpha^2 x^2\right) \tag{9}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{1+\alpha^2 x^2} \tag{10}$$

$$D_\alpha(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(ixt) dt. \tag{11}$$

VI. DIRAC δ-FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI

A Dirac δ-függvényre igazak a következő azonosság:

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n), \tag{12}$$

ahol x_n az $f(x)$ függvény n. gyöke.

1. Határozza meg a $\delta(x^2 - a^2)$ kifejezést értékét!

2. Az előző eredmény alapján mutassa meg, hogy $|x|\,\delta(x^2) = \delta(x)$.