

Sugárzás és szórás

I. SZÓRÁSOK

A. Szórás dielektromos gömbön

1. Számoljuk ki a szórási hatáskeresztmetszetet egy ϵ_r relatív dielektromos állandójú gömb esetén, amennyiben a gömb R sugara jóval kisebb mint a beeső fény hullámhossza! Jelölje \mathbf{e}_0 a bejövő, míg \mathbf{e} a kimenő polarizáció irányát megadó egységvektort.
2. Polarizálatlan beeső fény esetén a bejövő polarizációra átlagolni kell. Ha a kimeneti polarizációt nem detektáljuk, akkor arra pedig fel kell összegeznünk. Végezzük el ezeket a műveleteket!
3. Számolja ki a teljes polarizálatlan hatáskeresztmetszetet!

B. Thomson szórás

1. Határozzuk meg a pontszerű töltésen történő szórás differenciális hatáskeresztmetszetét dipólus (Larmor) közelítésben! Jelölje \mathbf{e}_0 a bejövő, míg \mathbf{e} a kimenő polarizáció irányát megadó egységvektort.
2. Számoljuk ki egy elektronon történő szórás hatáskeresztmetszetét! Írjuk fel ezt az

$$\alpha = \frac{Q_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.035999139(31)}$$

finomszerkezeti állandóval, és az elektron

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 2.4263102367(11) \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Compton hullámhosszával kifejezve!

Megjegyzés: A Thomson-szórás formulája abban az esetben érvényes, amikor a beeső fény hullámhossza jóval nagyobb, mint a Compton hullámhossz ($\lambda \gg \lambda_c$); ha ez nem teljesül, a folyamatot a kvantumelektrodinamika eszközeivel kell leírni: ez a Compton-szórás.

II. ELEKTROMÁGNESES SUGÁRZÁS

Az előadáson tanultak alapján egy ω körfrekvenciával rezgő

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

árameloszlás esetén a távoli zónában a sugárzási teret leíró vektorpotenciál alakja

$$\mathbf{A}_{\text{sug}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}),$$

ahol az amplitúdófüggvény

$$\mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}) = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}')e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}$$

nem más, mint az $\omega = ck$ frekvenciájú gömbhullám amplitúdója a θ, ϕ szögekkel paraméterezett $\hat{\mathbf{x}} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$ irányban, és

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{sug}}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_0} ik\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}_{\text{sug}}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{E}_{\text{sug}}(t, \mathbf{x}) &= Z_0 \mathbf{H}_{\text{sug}}(t, \mathbf{x}) \times \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

ahol

$$Z_0 = \mu_0 c \approx 120\pi \text{ Ohm}$$

a vákuum impedanciája, valamint

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_{\text{sug}} \times \mathbf{H}_{\text{sug}} = Z_0 |\mathbf{H}_{\text{sug}}|^2 \hat{\mathbf{x}},$$

és az időátlagos Poynting vektorra

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{Z_0}{2} |\mathbf{H}_{\text{sug}}|^2 \hat{\mathbf{x}}$$

adódik, ahonnan a térszög szerint differenciális sugárzási teljesítmény

$$\frac{dP}{d\Omega} = \bar{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{x}} r^2 = \frac{Z_0 \omega^2}{32\pi^2 c^2} |\mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}|^2.$$

Vagyis a teljes kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{Z_0 \omega^2}{32\pi^2 c^2} \int d\Omega |\mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}}|^2.$$

Elektromos dipólközelítés akkor alkalmazható, ha a forrás d mérete kicsi a hullámhosszhoz képest, azaz

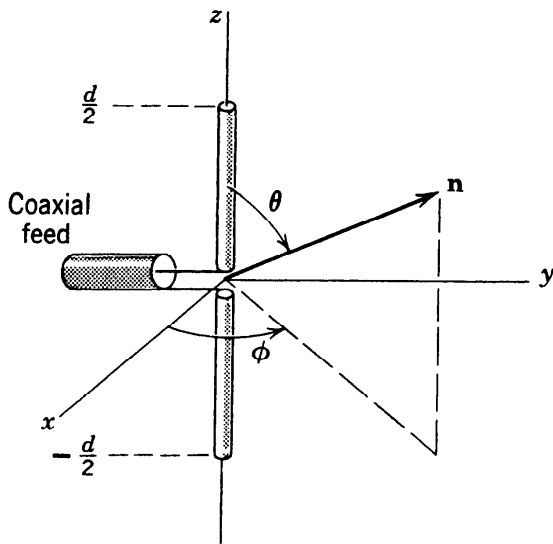
$$kd \ll 1.$$

Ekkor

$$\mathbf{a}(k, \hat{\mathbf{x}}) = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}')e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \approx \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = -i\omega \mathbf{p},$$

A. Hertz dipólus

Vegyünk két egymástól d távolságra lévő egyenes huzalal összekötött kisméretű gömböt, amiken $\pm Q(t)$ töltés van, ahol $Q(t) = Q_0 \sin \omega t$. Adjuk meg a teljesítmény szögeloszlását és a teljes teljesítményt dipólközelítésben!



1. ábra. Középen táplált egyenes antenna. A sugárzás irányát \mathbf{n} jelöli.

B. Középen táplált egyenes antenna sugárzása

Az antenna egy realiztikus modellje a középen táplált egyenes antenna (1. ábra), aminek nagy gyakorlati jelentősége van.

1. Tegyük fel, hogy az árameloszlás a d hosszúságú antenna mentén lineáris (a végpontokban a töltésmegmaradás miatt eltűnik):

$$I(t, z) = I_0 e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right).$$

Adjuk meg a kisugárzott teljesítményt dipólközelítésben! Mennyi az antennát mint fogyasztót jellemző ún. sugárzási ellenállás?

2. A dipólközelítés csak akkor igaz, ha a forrás mérete jóval kisebb, mint a hullámhossz, azaz

$$d \ll \lambda \text{ azaz } kd \ll 1.$$

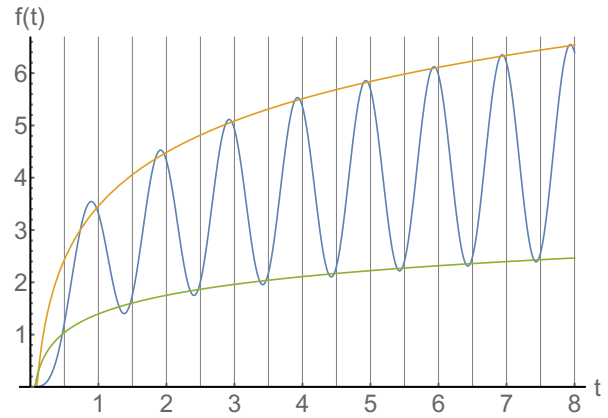
Mi történik, ha az antenna mérete összemérhető a hullámhosszal? Ehhez vegyünk egy fizikailag reális áram eloszlást:

$$I(t, z) = I_0 e^{-i\omega t} \sin k \left(\frac{d}{2} - |z| \right),$$

ez térben pont a megfelelő hullámszám szerinti periodicitást mutat, és a végeken eltűnik. Számoljuk ki a kisugárzott teljesítmény térszög szerinti eloszlását!

3. A fentiek alapján számítsa ki a teljes kisugárzott teljesítményt! Ezt érdemes numerikusan elvégezni és az eredményt a

$$P = \frac{Z_0 I_0^2}{4\pi} f(t)$$



2. ábra. Az egyenes antenna sugárzási ellenállása a $t = d/\lambda$ függvényében. Az ábrán a görbe felső és alsó aszimptotikus burkolója is látható, amelyek alakja numerikusan $1.76606 + 1.47981 \log \pi t$ illetve $0.81716 + 0.51423 \log \pi t$. Ezek lassú, logaritmikus növekedése azt mutatja, hogy az antennát nem érdemes a hullámhossznál sokkal hosszabbra tervezni, mert ez nem javítja jelentősen a hatékonyságot.

alakba írva, a

$$t = \frac{d}{\lambda} = \frac{kd}{2\pi}$$

változó függvényében ábrázolni. A leghatékonyabb a sugárzás, ha az antenna hossza kb. a hullámszám egész számú többszöröse (ld. 2 ábra), félegészek közelében minimuma van:

$$f(1/2) = 1.21883 \dots$$

$$f(1) = 3.31813 \dots$$

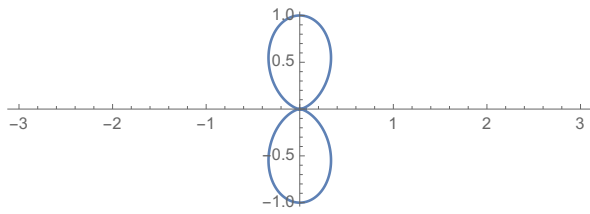
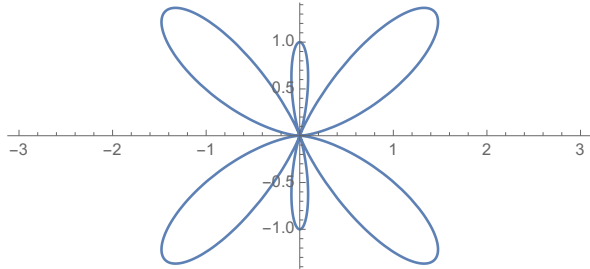
$$f(3/2) = 1.75824 \dots$$

$$f(2) = 4.32724 \dots$$

Ábrázolja a teljesítmény szög szerinti eloszlását is (3. és 4. ábra)!

Megjegyzés: Az antennákat általában fél hullámhossz dipólokból építik, az ennek többszörösét kitevő hosszúságú antennák sugárzási tere a félhullám dipól antenna terének szuperpozíciójával kapható. Fontos, hogy a mezőket kell szuperponálni, nem a teljesítményt, ezért figyelembe kell venni a fáziskülönbségekből adódó erősítéseket és kioltásokat!

Amikor az antenna vevőként funkcionál, akkor ugyanezek az összefüggések írják le a bejövő jelre való érzékenységeinek irányfüggését. A vételt el lehet képzelni a sugárzás folyamatának időben vett megfordításaként, a Maxwell egyenletek pedig invariánsak a $t \rightarrow -t$ időtükrözésre, amennyiben ennek során a mágneses mező és az áramsűrűség előjelét is megfordítjuk.

(a) $d = \lambda/2$ (b) $d = 3\lambda/2$

3. ábra. Az egyenes antenna teljesítményének szögfüggése félhullámnak megfelelő hossz esetén. Az antenna a vízszintes tengelyen helyezkedik el.

Az elemeket megfelelően elhelyezve sokféle iránykarakterisztikával rendelkező antenna készíthető, az antennák tervezésének komoly szakirodalma van.

C. Mágneses dipólusugárzás I

Az elektromos és mágneses dipólusok sztatikában megfelleltethetők egymásnak, mégpedig

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}}{r^3} \quad \mathbf{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{m}}{r^3},$$

ahonnan

$$\mathbf{B}_m = \frac{1}{c} \mathbf{E}_e \left(\mathbf{p} \rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c} \right).$$

Ezen egyszerű analógia alapján sejtse meg a mágneses dipólus sugárzási terét az elektromos dipólusból kiindulva!

Megoldás:

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{Z_0\omega^4 m_0^2}{32\pi^2 c^4} \sin^2 \theta \quad \text{és} \quad P_m = \frac{Z_0\omega^4 m_0^2}{12\pi c^4}.$$

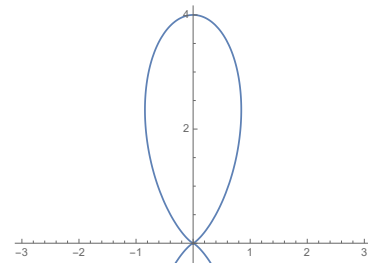
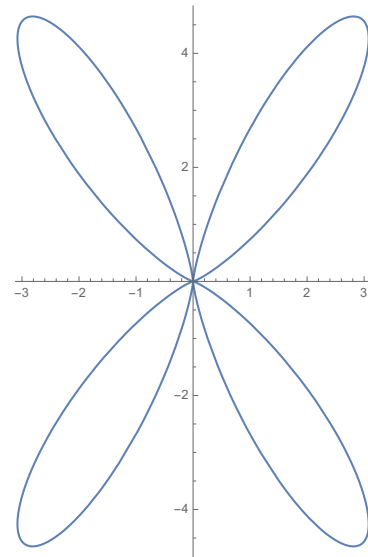
Ezt összevetve az elektromos dipólus eredményével

$$\frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{Z_0\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c^2} \sin^2 \theta \quad \text{és} \quad P_e = \frac{Z_0\omega^4 p_0^2}{12\pi c^2}$$

látható, hogy a mágneses eset a

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{\mathbf{m}}{c}$$

helyettesítéssel áll elő az elektromosból. Ezt a II E alatti részletes számolás is megerősíti.

(a) $d = \lambda$ (b) $d = 2\lambda$

4. ábra. Az egyenes antenna teljesítményének szögfüggése egész hullámnak megfelelő hossz esetén. Az antenna a vízszintes tengelyen helyezkedik el.

D. Magnetár lassulása

A magnetár forgó neutroncsillag mágneses mezővel, amit egy z tengely körül Ω szögsebességgel forgó, a tengellyel α szöget bezáró m nagyságú mágneses dipólusként modellezhetünk. Mivel a forgás két, x és y mentén $\pi/2$ fáziseltéréssel rezgő m sin α dipólus szuperpozíciójának felel meg, a kisugárzott elektromos és mágneses mező a két komponens összege

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sug}} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{H}_{\text{sug}} &= \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2. \end{aligned}$$

A teljes Poynting vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1,$$

és az ebben szereplő vegyes tagok időátlaga a fáziskülönbség miatt zérus. Tehát a kisugárzott energia egyszerűen kétszerese egy Ω körfrekvenciával rezgő $m \sin \alpha$ nagyságú dipólusénak:

$$P_m = \frac{Z_0 \Omega^4 m^2 \sin^2 \alpha}{6\pi c^4} = \frac{\mu_0 \Omega^4 m^2 \sin^2 \alpha}{6\pi c^3}.$$

1. Az SGR1806-20 röntgen pulzár periódusideje $T = 7.5$ s és lassulási rátája $\dot{T} = 8 \cdot 10^{-11}$. Feltéve, hogy a neutroncsillag tömege és sugara a standard $M = 1.4M_\odot = 2.8 \cdot 10^{30}$ kg és $R = 10$ km értékű, becsülje meg a mágneses nyomatékot a forgási energia vesztését a kisugárzott teljesítménnyel azonosítva!

Megoldás:

$$m = \sqrt{\frac{6MR^2c^3}{5\mu_0\Omega}} \dot{T} = \sqrt{\frac{3MR^2c^3}{5\pi\mu_0}} T\dot{T} = 8.3 \cdot 10^{33} \text{ Am}^2.$$

2. A fentiek alapján becsülje meg a csillag felszínén a maximális mágneses indukciót!

Megoldás: a dipólus mágneses teréből

$$B_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{R^3} = 1.7 \cdot 10^{11} \text{ T}.$$

3. Mekkora a maximális mágneses indukcióhoz tartozó energiasűrűség?

Megoldás:

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = 1.1 \cdot 10^{28} \text{ J/m}^3.$$

Megjegyzések:

1. Az energiasűrűségekre kapott érték óriási, az ehhez tartozó tömegsűrűség

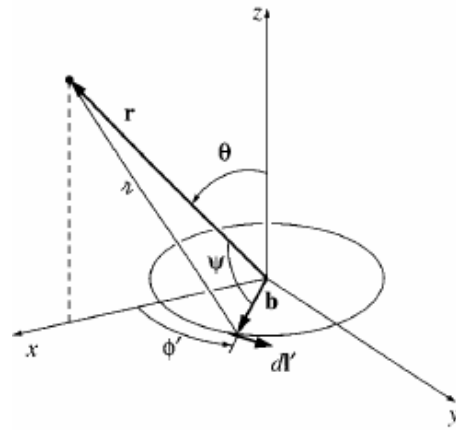
$$\frac{w}{c^2} = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ kg/m}^3.$$

Ez mintegy 7 nagyságrenddel nagyobb minden ismert szilárd anyag sűrűségénél (pl. ólom $1.13 \cdot 10^4$ kg/m³, arany $1.93 \cdot 10^4$ kg/m³), de még így is 6 nagyságrenddel kisebb a neutroncsillagot alkotó anyag sűrűségénél, ami a maganyag sűrűségével vethető össze. Azaz a neutroncsillag körül „szinte vágni lehet” a mágneses mezőt: a csillagtól mintegy 1000 km-es távolságban lesz a a hozzátartozó tömegsűrűség a szilárd anyagokéhoz hasonló.

2. B_{\max} értéke majdnem 40-szer nagyobb, mint az ún. kritikus mágneses mező:

$$B_{\text{crit}} = 4.4 \cdot 10^9 \text{ T}.$$

Amennyiben a vákuumban a mágneses indukció ezt az értéket meghaladja, spontán elektron-pozitron párkeltés indul be. Ugyanakkor a neutroncsillagot körülvevő magnetoszférát alkotó relativisztikus plazma ezt az effektust el tudja nyomni (ún. „force-free electrodynamic”).



5. ábra. Oszcilláló köráram paraméterezése

E. Mágneses dipólusgátlás II

Tegyük fel, hogy egy hurokban egy váltakozó áram kering

$$I(t) = I_0 \cos \omega t.$$

Az egyszerűség kedvéért vegyük a hurkot egy kis méretű b sugarú körnek, ami legyen az origóban és a tengelye legyen z irányú. Számolja ki a kisugárzott teljesítményt feltéve, hogy a köráram mérete jóval kisebb, mint az ω körfrekvenciához tartozó hullámhossz!

A szükséges közelítések:

1. közelítés (távolzóna): $b \ll r$
2. közelítés (dipólus): $b \ll c/\omega$
3. közelítés (távolzóna): $r \gg c/\omega$

Megoldás: a retardált vektorpotenciál

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint \frac{\cos \omega(t - z/c)}{z} ds'.$$

A körpályát a ϕ' központi szöggel paraméterezve (5. ábra) az integrál a következő alakba írható

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi} \hat{\mathbf{y}} \oint \frac{\cos \omega(t - z/c)}{z} \cos \phi' d\phi',$$

ha az x tengelyt úgy vesszük fel, hogy az \mathbf{x} pont az xz síkba esik. Ekkor

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} r \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} r \cos \theta, \quad \mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} b \cos \phi' + \hat{\mathbf{y}} b \sin \phi'$$

és

$$z = |\mathbf{r} - \mathbf{b}| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \sin \theta \cos \phi'}.$$

1. közelítés (távolzóna): $b \ll r$, ekkor

$$z \approx r \left(1 - \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)$$

$$\frac{1}{z} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)$$

$$\cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \approx \cos \left(\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right).$$

2. közelítés (dipólus): $b \ll c/\omega$ kihasználásával

$$\cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \approx \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega b}{c} \sin \theta \cos \phi' \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Ezzel fel lehet írni az integrált (eldobva a másodrendű tagot):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r} \hat{\mathbf{y}} \oint d\phi' \cos \phi' \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + b \sin \theta \cos \phi' \left[\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\},$$

és elvégezve az integrálokat:

$$\int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} d\phi' \cos^2 \phi' = \pi$$

kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r} \hat{\mathbf{y}} \left[\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

ahol $m_0 = I_0 \pi b^2$. Ha az \mathbf{r} nem az xz síkban van, akkor $\hat{\mathbf{y}}$ helyébe a gömbi \mathbf{e}_ϕ bázisvektort (a „szélességi körök érintőjét”) kell írni.

3. közelítés (távolzóna): $r \gg c/\omega$ felhasználásával az első tag elhanyagolható, tehát

$$\mathbf{A} = -\mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 m_0 \omega \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

ahol $m_0 = I_0 \pi b^2$ a rezgő mágneses dipólus amplitúdója, azaz gömbi komponensekben

$$A_r = A_\theta = 0, \\ A_\phi = -\frac{\mu_0 m_0 \omega \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

A mágneses mező a távolzónában

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \\ &= -\mathbf{e}_\theta \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned}$$

ahol a gömbi rotáció formuláját használtuk és eldobtuk az $1/r^2$ tagokat, az elektromos mező pedig

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Ebből kiindulva már felírható a sugárzási zónában a Poynting vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_r Z_0 \left[\frac{m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2$$

a felületegységen kiáramló energia időátlaga pedig

$$\bar{S} = \frac{Z_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^4} \frac{1}{r^2},$$

ahonnan

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^4} \sin^2 \theta.$$

Megjegyzés: Az elektromos dipólus sugárzásra vonatkozó

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c^2} \sin^2 \theta$$

eredménnyel összevetve azt látjuk, hogy a mágneses dipólus sugárzás teljesítménye megkapható az

$$p_0 \rightarrow \frac{m_0}{c}$$

helyettesítéssel. A kettő aránya

$$\frac{P_m}{P_e} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2.$$

Vegyünk egy ugyanakkora méretű elektromos és mágneses dipólust. Ekkor

$$p_0 = Q_0 d \quad m_0 = I_0 \pi b^2,$$

ugyanakkor az elektromos dipólra jellemző áram $I_0 = \omega Q_0$ és a méretek egyezéséből $d \sim \pi b$. Ebből pedig

$$\frac{P_m}{P_e} \sim \left(\frac{\omega b}{c} \right)^2.$$

De a dipólközelítés szerint $b \ll c/\omega \Rightarrow \omega b/c \ll 1$, tehát tipikusan az elektromos dipólus tag dominál, kivéve ha valamiért éppen eltűnik, pl. mint az itt tárgyalt oszcilláló köráram esetén:

$$\int d^3 \mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = I \oint d\mathbf{s}' = 0.$$