

Példák: Eltolási áram, megmaradási tételek

I. VASTAG HUZAL LÉGRÉSSEL (A TÍPUSÚ)

Adott egy vastag a sugarú huzal, amelyben I áram folyik. Az áram a huzal keresztmetszetén egyenletesen oszlik el. A huzalban van egy vékony ($w \ll a$) légrés. A hosszak egymáshoz való viszonyai olyanok, hogy a légrést tekinthetjük egy síkkondenzátornak. Az elrendezést a 1. ábra mutatja. Határozza meg a mágneses teret a légrésen belül, a tengelytől s távolságra!

II. KONDEZNÁTOR TÖLTÉS KÖZBEN (A TÍPUSÚ)

Adott a 1. ábrán mutatott elrendezés, egy a (széles) sugarú huzal, amelyben I áram folyik, és egy $w \ll a$ vastagságú légrés van. Ez az elrendezés egy olyan síkkondenzátornak fogható fel, amely éppen töltődik.

1. Határozza meg az elektromos és mágneses tereket a légrésben, a tengelytől való távolság r és az idő t függvényében, ha $t = 0$ időben a töltés nulla!
2. Határozza meg a u energiasűrűséget és az \mathbf{S} Poynting vektort a légrésben! Milyen irányba mutat a Poynting vektor? Ellenőrizze, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{em} = -\nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (1)$$

3. Határozza meg a résben jelenlévő energiát az idő függvényében! Számolja ki a résbe beáramló teljesítményt a Poynting vektor megfelelő felületre való kiintegrálásával! Ellenőrizze, hogy a beáramló teljesítmény megegyezik az energia idő szerinti deriváltjával!

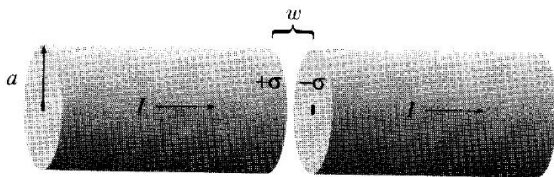


FIG. 1. Kondenzátor elrendezés, töltés közben.

III. SÍKKONDEZNÁTORRA HATÓ ERŐ (A TÍPUSÚ)

Adott egy síkkondenzátor, amelynek a $-\sigma$ töltéssűrűségű síkja a $z = -d/2$ -n helyezkedik el, a σ töltéssűrűségű pedig a $z = d/2$ -n.

1. Határozza meg az elrendezés Maxwell-féle feszültségtenzorát! Írja fel mátrix alakban!
2. Határozza meg a felső síkra ható erőt a Maxwell-féle feszültségtenzor alapján!
3. Mekkora az az xy -sík egységnyi felületén egységnyi idő alatt áthaladó impulzus?
4. A síkok ezt az impulzust "elnyelik", ezért ha nincs valamilyen más erő amely a síkokat rögzíti, akkor elmozdulnának. Számolja ki a síkokra ható erőt a Maxwell-féle feszültségtenzort felhasználva!

IV. SÍKKONDEZNÁTOR MÁGNESES TÉRBEN (B TÍPUSÚ)

Egy töltött síkkondenzátort mágneses térbe helyezünk a 2. ábrán mutatott módon. A kondenzátorban jelenlévő elektromos tér $\mathbf{E} = E\hat{z}$, a mágneses tér pedig $\mathbf{B} = B\hat{x}$.

1. Határozza meg az elektromágneses impulzust a síkok között!
2. A két sík közé véges ellenállású elektromos huzalt kötünk, így a kondenzátor lassan kisül. Az huzalban jelenlévő áramra mágneses erő hat. A kisülés alatt mekkora a rendszert érő teljes impulzus?
3. Ha a mágneses teret lassan lekapcsoljuk, a rendszerben egy Faraday effektus lép fel, azaz elektromos tér indukálódik. Ezek a terek a síkokra véges erővel hatnak. Mutassa meg, hogy a teljes impulzus egyenlő a terekben eredetileg tárolt lendülettel!

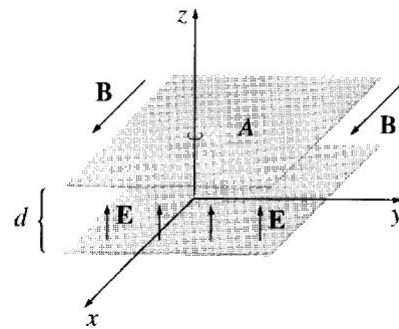


FIG. 2. Síkkondenzátor mágneses térben.

V. SZOLENOID ÉS KÉT TÖLTÖTT HENGER (B TÍPUSÚ)

Adott egy nagyon hosszú, R sugarú, n menetsűrűségű szolenoid, amelyben I áram folyik. A szolenoiddal koaxiálisan van elhelyezve két további henger, melyeknek sugara $a < R$, $b > R$, hossza mindkettőnek $l \gg b$. A kisebbik sugarú hengeren Q , a nagyobbik sugarún $-Q$ töltés van jelen. A 3. ábra ezt az elrendezést mutatja. Amikor a szolenoidban jelenlévő áram csökken, a hengerek elkezdnek forogni. Magyarázza meg a *perdület* eredetét!

1. Határozza meg a lendületsűrűséget a belső henger és a szolenoid közötti tartományban!
2. Határozza meg a perdületsűrűséget, valamint a teljes integrált perdületet a belső henger és a szolenoid közötti tartományban!
3. Ha az áramot csökkentjük, a változó mágneses tér egy indukált elektromos teret hoz létre. Határozza meg ezt a teret!
4. Határozza meg a forgatónyomatékok és a belőle származó perdületet a külső és belső hengerekre!
5. Igazolja, hogy a perdület megmarad!

VI. FÉMGÖMB LEMÁGNESEZÉSE (B TÍPUSÚ)

Adott egy R sugarú vasgömb, amelyen Q homogén eloszlású töltés és homogén $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ mágneszettség van jelen. Eredetileg a gömb nyugalomban van.

1. Számolja ki a terek által tárolt perdületet!
2. A gömböt lassan, de egyenletesen lemágnesezzük, (pl. úgy, hogy a Curie pont fölé hevítjük). Számolja ki az indukált elektromos teret! Számolja ki a forgatónyomatékokat a gömbön és a gömb által nyert perdületet a lemágnesezés alatt nyert perdületet!
3. Tegyük fel, hogy a lemágnesezés helyett a gömböt kisütjük, amit az északi pólus földelésével érünk el. A kisülés alatt a töltéssűrűség homogén marad. A Lorentz-erő alapján számolja ki a gömbre ható forgatónyomatékokat! Számolja ki a gömb által nyert perdületet a kisülés alatt! (A mágneses mező a felületen nem folytonos...ez számít?)

További gyakorlásra

VII. KÉT PONTTÖLTÉS (A TÍPUSÚ)

1. Adott két egyenlő nagyságú (q) ponttöltés egymástól $2a$ távolságra. A Maxwell-féle
2. Ismétlje meg a fenti számolást arra az esetre, ha a két töltés ellentétes előjelű!

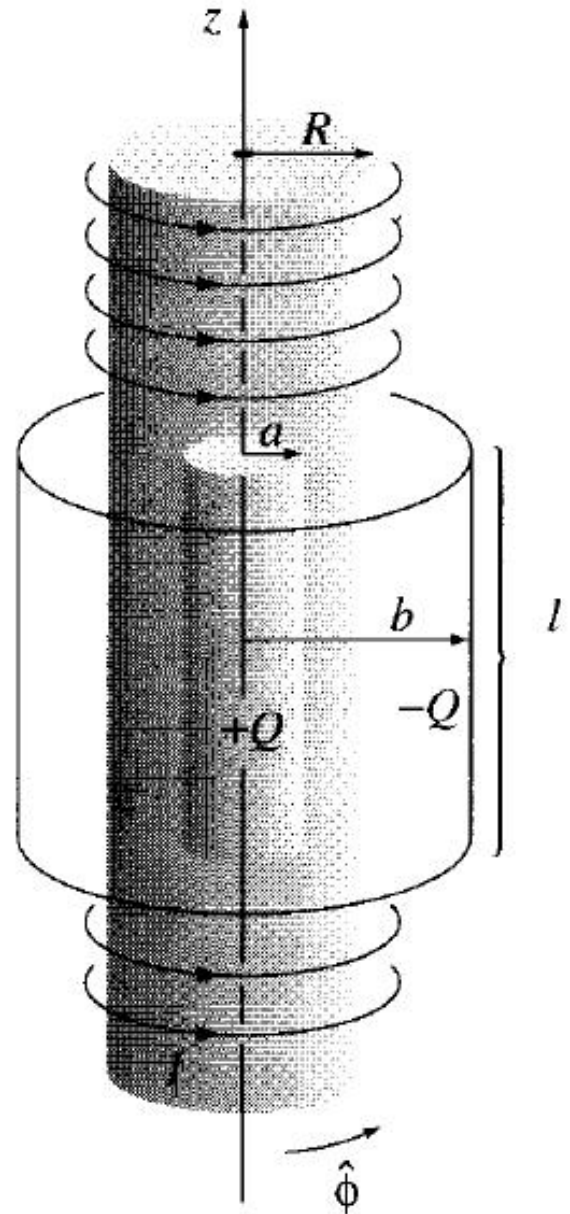


FIG. 3. Szolenoid és két töltött henger.

feszültségtenzor felezősíkra való kiintegrálásával határozza meg az egyik töltés által a másikkra kifejtett erőt!

VIII. KOAXIÁLIS KÁBELT TARTALMAZÓ ÁRAMKÖR (A TÍPUSÚ)

Adott egy hosszú (l hosszúságú) koaxiális kábel, amelyben van egy belső, a sugarú vezető, amelyet körülvesz egy b sugarú külső vezető. A két kábelt az egyik oldalon összeköt egy feszültségforrás, a másikon pedig egy ellenállás. Ld. 4. ábra. A belső hengeren λ vonalsűrűségű töltés van, valamint I nagyságú áram folyik a 4. ábrán jelölt irányban. A külső hengeren $-\lambda$ vonalsűrűségű töltés van, és $-I$ nagyságú és irányú áram. A bal oldalon a két henger között egy feszültségforrás van, amely V feszültségkülönbséget tart fenn a két henger között. Az elrendezés jobb oldalán a két hengerhez egy R ellenállás van kötve.

1. Mekkora a Poynting vektor és a teljesítmény? Mekkora az elektromágneses terek által tárolt lendület?
2. A terekben van impulzus, viszont a kábel-elrendezés maga nyugalomban van. Honnan ered a "hiányzó" impulzus?

Tegyük fel, hogy az ellenállás R változik ami által az áram is változik ($\frac{dI}{dt}$).

1. Számolja ki az indukált elektromos teret!
2. Ha az áram I -ről 0 -ra esik, mennyivel változik a kábel impulzusa? (Tekintszen el a "hiányzó" lendülettől!)

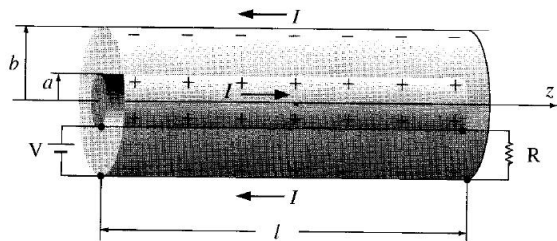


FIG. 4. Koaxiális kábel elemei által alkotott áramkör.

IX. SUGÁRNYOMÁS (A TÍPUSÚ)

A fény intenzitását az időátlagolt Poynting vektor nagyságával, azaz az egységnyi felületen egységnyi idő alatt átmenő energiával jellemezzük:

$$I = \bar{S}. \quad (2)$$

1. Fejezze ki a felületre merőlegesen beeső fény által kifejített nyomást, ha a felület (a) tökéletesen elnyeli; (b) tökéletesen visszaveri a fényt!

2. A Földet érő napsugárzás intenzitása 1300 W/m^2 . Mekkora nyomást fejt ez ki a fenti két esetben? Hogyan viszonyul ez a légköri nyomáshoz?

X. IDŐÁTLAGOLÁS KOMPLEX FORMALIZMUSBAN (A TÍPUSÚ)

1. Adott két hullám komplex változókkal felírva, azaz a fizikai érték a komplex megoldás valós része

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left(\tilde{f} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right) \\ g(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left(\tilde{g} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Mutassa meg, hogy

$$\overline{fg} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\tilde{f} \tilde{g}^* \right). \quad (4)$$

2. A fenti eredményt használva írja fel egy komplex formalizmusban felírt

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \quad (5)$$

elektromágneses síkhullám időre átlagolt energiasűrűségét, impulzussűrűségét és Poynting vektorát!

XI. SZOLENOID ÉS KÉT TÖLTÖTT HENGER II (B TÍPUSÚ)

Tegyük fel, hogy a 3. ábrán mutatott elrendezés esetében nem a mágneses teret változtatjuk, hanem az elektromos teret (a két töltött henger között). Ezt egy, a két henger közé forrasztott, gyengén vezető küllő segítségével lehet megvalósítani. (Ehhez egy rést kell vágni a szolenoidon belül is, hogy a két henger szabadon foroghasson.) A küllőn folyó áramra ható mágneses térből határozza meg a teljes perdületet amelyet a hengerek nyernek a kisülés közben! (A két henger és a küllő össze vannak forrasztva, így együtt forognak.) Hasonlítsa össze a hengerek által nyert perdületet, a terek által eredetileg tárolt perdülettel (amely az előző feladat megoldása)! Vegye észre: a két esetben (jelenlegi és előző feladat) a perdület átadás mechanizmusa nagyon különböző!

XII. EGYENLETES TÖLTÉSŰ FORGÓ GÖMB (B TÍPUSÚ)

Adott egy egyenletesen töltött Q össztöltésű R sugarú gömbhéj, amely ω szögsebességgel forog. Határozza meg a gömbhéj északi felére ható eredő erőt a Maxwell-féle feszültségtenzor alkalmazásával!

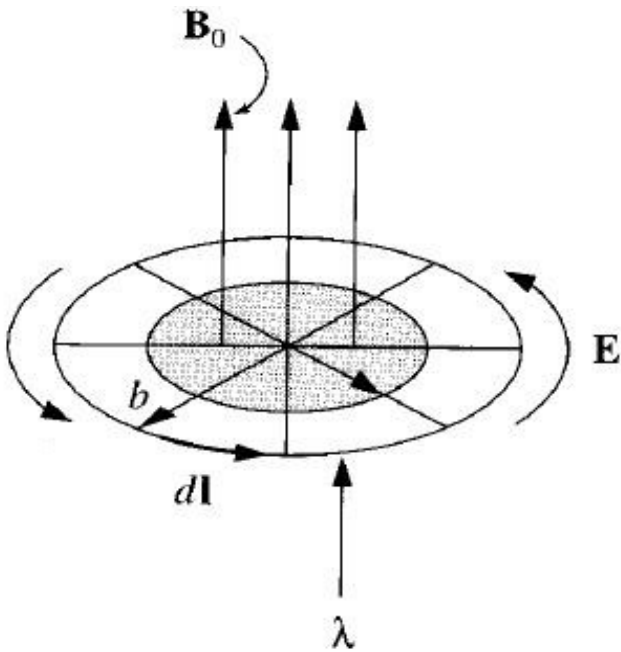


FIG. 5. Kör alakú vonaltöltés mágneses térben

XIII. KÖR ALAKÚ VONALTÖLTÉS MÁGNESES TÉRBEN (B TÍPUSÚ)

Egy vízszintes helyzetben felfüggesztett b sugarú kerék peremén λ vonaltöltés helyezkedik el (5. ábra). A kerék szabadon elfordulhat és küllői nem vezető anyagból (pl. fa) készültek. A kerék közepén, a sugarú (kör alakú) tartományban felfelé mutató \mathbf{B} homogén mágneses tér van. Mi történik, ha a mágneses teret kikapcsoljuk?

XIV. SÍKHULLÁM MAXWELL-FÉLE FESZÜLTSEGTENZORA (B TÍPUSÚ)

Adott egy monokromatikus síkhullám amely a z irányba terjed, és az x irányba polarizált. Számolja ki a Maxwell-féle feszültségtenzort erre az esetre! Mi a kapcsolat az impulzus-áramsűrűség és az energiasűrűség között?