

**A 16.)**

Adott két darab, fémből készült, tömör, ( $R$  sugarú) félgömb. A félgömböket „elássuk” a talajba úgy, hogy a sík felületük a vízszintes talajjal egy szintben legyenek. A félgömbök tengelyei egymástól  $D \gg R$  távolságra vannak. A fém végtelen jó vezető, a talaj vezetőképessége mindenhol  $\sigma$ .

Keressük a két félgömb közötti elektromos ellenállást.

- Keresse meg azt az elektrosztatikai elrendezést, amelyiknek a  $\vec{D}(\vec{r})$  (eltolási vektor) tere megfelel a földben folyó  $\vec{j}(\vec{r})$  áramsűrűség vektormezőnek!
- Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés  $\Phi(\vec{r})$  potenciálterét az  $R/D$  arány elsőrendű közelítésében!
- Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés  $C$  kapacitását!
- Határozza meg a (szóban forgó közelítésben) a két félgömb között mérhető elektromos ellenállást!

**A 17.)**

Adott egy  $2b$  átmérőjű fém rúd, amelynek a hossza  $L \gg b$ . A rudat (a vízszintes talajszintre merőlegesen) félig beszúrjuk a talajba. Keressük az elrendezés földelési ellenállását.

A fémrúd végtelen jó vezető, a talaj vezetőképessége mindenhol  $\sigma$ . A rúd egy forgási ellipszoiddal közelíthető.

- Keresse meg azt az elektrosztatikai elrendezést, amelyiknek a  $\vec{D}(\vec{r})$  (eltolási vektor) tere megfelel a földben folyó  $\vec{j}(\vec{r})$  áramsűrűség vektormezőnek!
- Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés  $\Phi(\vec{r})$  potenciálterét!
- Határozza meg az elektrosztatikai elrendezés  $C$  kapacitását!
- Határozza meg a (szóban forgó közelítésben) a fémrúd földelési ellenállását!

**A 18.)**

Adott egy  $a$  sugarú gömb. A gömbön belül olyan homogén, izotróp dielektrikum van, amelynek a polarizáció(vektorát) a következő  $P(E)$  függvény jellemzi

$$P(E) = \begin{cases} \frac{P_0}{E_0} \cdot E, & 0 \leq E \leq E_0 \\ P_0, & E_0 \leq E \end{cases}$$

ahol  $P_0 = 5\varepsilon_0 E_0$ .

A gömb belsejében összesen  $Q$  töltést helyeztünk el  $\rho(r) = \rho_0(1 - r^2/a^2)$  térfogati töltéssűrűség szerinti eloszlásban. A  $Q$  értéke akkora, hogy a dielektrikum az  $a$  sugár felénél éri el a maximális polarizáltságát.

- Rajzolja fel a  $P(E)$  függvényt!
- Rajzolja fel a  $\rho(r)$  függvényt!
- Határozza meg a  $\vec{D}$  elektromos eltolás(vektor)t mindenhol a térben! Rajzolja fel a  $\vec{D}$ -t jellemző függvényt!
- Határozza meg az  $\vec{E}$  elektromos térerősséget mindenhol a térben! Rajzolja fel a  $\vec{E}$ -t jellemző függvényt!
- Határozza meg  $Q$  értékét!
- Határozza meg dielektrikumban indukálódott  $\rho_p$  (térfogati) és  $\sigma_p$  (felületi) polarizációs töltéssűrűségeket!

**B 11.)**

Adott egy  $R$  sugarú fémgömb amelyet egy nagyon nagy (elvileg végtelen) homogén, izotróp dielektrikum vesz körül. A dielektrikum anyagában az  $E$  elektromos tér hatására indukálódó  $P(E)$  polarizáció vektor a következő függvénnyel írható le:

$$P(E) = \begin{cases} P_0 \cdot \frac{E}{E_0} \left(2 - \frac{E}{E_0}\right), & 0 \leq E \leq E_0 \\ P_0, & E_0 \leq E \end{cases}$$

ahol  $P_0 = 5\varepsilon_0 E_0$ .

A fémgömbre  $+Q$  töltést teszünk.

- Rajzolja fel a  $P(E)$  függvényt!
- Határozza meg a  $D(r)$  eltolási vektor helytől való függését! (Ahol  $r$  a gömb középpontjától mért távolság.)
- Tekintsük a jól ismert  $D(E) = \varepsilon_0 E + P(E)$  (definíciós) kapcsolat. Célszerű bevezetni a következő jelöléseket:  $y = E/E_0$ ,  $E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$  és  $x = a/r$ . A bevetetett  $(y, x, a)$  jelölések használatával hozza a  $D(E)$ -t a következő alakra  $D(E) = \varepsilon_0 E_0 \cdot g(y)$ !
- Írja be a  $D(E)$  helyére a  $D(r)$  függvényt és a kapott kifejezést hozza  $g(y) = x^2$  alakra. Határozza meg ebből az  $y(x)$  függvényt! Ez tulajdonképpen impliciten tartalmazza az  $E(r)$  függvényt.
- Határozza meg az  $y(x)$  közelítő értékét. Használja ki azt a tényt, hogy  $E(r \rightarrow \infty) = 0$ ! Az  $y(x)$  ismeretében adja meg az  $E(r)$  függvényt!
- Határozza meg azt az  $r_0$  sugarat amelyre igaz, hogy  $r < r_0$  tartományban mindenhol a  $P = P_0$ !
- Határozza meg az  $E(r)$  függvényt, ha  $r < r_0$ !
- Rajzolja fel az  $E(r)$  függvényt az  $r_0 \leq r \leq \infty$  tartományban!
- Határozza meg dielektrikumában indukálódott  $\rho_P$  (térfogati) polarizációs töltéssűrűségeket!

**B 12.)**

Adott egy  $R$  sugarú fémgömb, a melyen  $+Q$  töltés van. A gömb egy olyan folyadékba merül, amelyben  $E$  elektromos tér hatására  $\rho(r)$  térbeli töltésseloszlás keletkezik. Ez a töltésseloszlás az adott helyen lévő  $\Phi$  elektromos potenciállal arányos, azaz  $\rho(r) = -k\Phi(r)$ . Tudjuk, hogy  $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ .

- Írja fel a Poisson egyenletet a jelen elrendezés esetére!
- Írja fel a Poisson egyenlet polárkoordinátás alakját! Használja a kiadott képletgyűjteményt!
- Vezesse be a  $\Psi(r) = r\Phi(r)$  függvényt és hozza a Poisson egyenletet  $\Psi'' \propto \Psi$  alakra!
- Határozza meg a  $\Psi(r)$ -t, majd abból a  $\Phi(r)$  potenciálfüggvényt!
- A  $\Phi(r)$  ismeretében határozza meg az  $E(r)$  térerősséget mindenhol a térben!
- Határozza meg a  $D(r)$  eltolási vektort!
- Az  $E(r)$  a  $D(r)$  ismeretében határozza meg a  $P(r)$  polarizációt mindenhol a térben!
- Határozza meg dielektrikumában indukálódott  $\rho_P$  (térfogati) polarizációs töltéssűrűségeket!