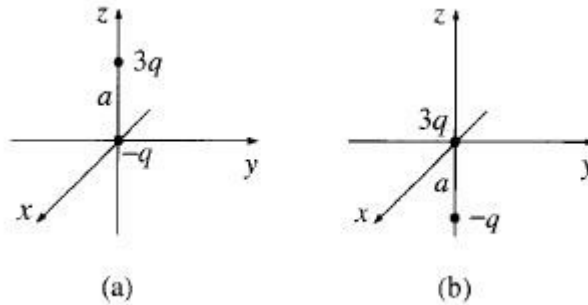


## TÉMA: Multipólus sorfejtés

### 1.) feladat

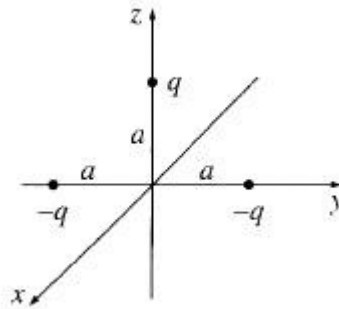
Tekintsünk két, „ $3q$ ” és „ $-q$ ” töltésű ponttöltést „ $a$ ” távolságra, az ábrán látható elrendezésekben.



- Határozza meg a két elrendezés töltését és dipólmomentumát!
- Határozza meg a potenciált (gömbi koordinátákban) közelítőleg, nagy „ $r \gg a$ ” távolságokra, a monopólus és dipólus járulékokat figyelembe véve!

### 2.) feladat

Tekintsük az ábrán látható három ponttöltést.

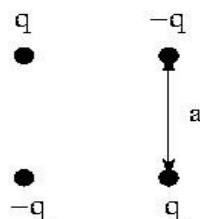


Határozza meg a multipól sorfejtés két legalacsonyabb rendjében az elektromos térerősséget az origótól távol. Fejezze ki a választ gömbi koordinátákban!

### 3.) feladat

Számítsa ki a kvadrupólus tenzorát az ábrán látható, „ $a$ ” oldalú négyzet alakban elrendezett négy töltésnek! A koordinátatengelyeket válassza

- a négyzet oldalfelezőinek,
- a négyzet átlóinak!



**4.) feladat**

Adott egy hengerszimmetrikus  $\rho$  töltéssűrűség. A forgási szimmetria tengelye legyen a koordinárendszer „z” tengelye!

- Határozza meg a  $\underline{Q}$  kvadrupól tenzor mátrixának a matematikai felépítését!
  - Határozza meg a  $Q_{zz}$  mátrixelemet!
  - Határozza meg a (hengerszimmetrikus)  $\Phi(r)$  potenciál multipól sorfejtésének a  $\Phi_2(\bar{r})$  (kvadrupól) járulékát! Használjon (célszerűen) gömbi koordinátákat:  $\Phi_2(r, \cos \vartheta)$ !
  - Határozza meg a  $\Phi_2(r, \cos \vartheta)$  potenciált az „z” tengely mentén!
- 

**5.) feladat**

Adott egy egyenletesen töltött, „R” sugarú körvonal! A kör síkja az (x,y) sík és centruma az Origóban van.

- A körvonal „Q” össztöltése ismert. Határozza meg a körvonal „P” dipólus momentumát és a  $\underline{Q}$  kvadrupól tenzorát a megadott koordináta rendszerben!
  - A fentiek ismeretében határozza meg  $\Phi(r)$  potenciál közelítő értékét a térben, a körgyűrűtől elegendően nagy távolságra, kvadrupól rendig bezárólag!
  - Ismeretes a  $\Phi(z)$  potenciál pontos alakja. Fejtse ezt a függvényt Taylor sorba, ha „z>>R”!
  - Hasonlítsa össze a b.) –ben és a c.) - ben kapott eredményeket!
- 

**6.) feladat**

Adott a következő jól ismert (mértani sor összeg) kifejezés

$$1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n = \frac{1}{1-t} \quad \text{ahol } 0 < t < 1 \quad \text{és } a_n = 1 \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

Vesszük ennek egy lehetséges általánosítását a következő módon:

$$\frac{1}{1-t} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot t^n \quad \text{ahol } 0 < t, x < 1 \quad \text{és } P_n(x)$$

$P_n(x)$  neve Legendre polinom: Táblázatban megtalálhatók.

- Rajzolja fel a  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$  polinomokat!
  - Legyen  $x = \cos \vartheta$  és  $t = r$ ! Mutassa meg, hogy az így kapott fenti szumma (a kikötött korlátok mellett) éppen az  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{e}_z|}$  kifejezés értékét adja. Ahol  $\vec{e}_z$  („z” irányú egységvektor) és  $\vec{r}$  egy helyvektor
  - A fentiek ismeretében határozza meg az „a = +a ·  $\vec{e}_z$ ” helyen lévő „Q” ponttöltés elektromos terében a  $\Phi_+(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}$  potenciál közelítő értékét  $P_2(\cos \vartheta)$  rendig bezárólag.  
Végezze el a számolást két esetben:  
legyen ( $r << a$ ) és  
legyen ( $a << r$ )!
  - Ismételje meg a c.) számolást, ha a „Q” ponttöltés a „- a” pontban van!
-

**7.) feladat**

Adott egy hengerszimmetrikus  $\rho$  töltéssűrűség. A töltéseloszlás szimmetria tengelye legyen a koordinárendszer „z” tengelye! Ekkor a töltéselrendezés „dq” töltésű „körgyűrűk” sokaságára bontható. Ugyanakkor egy „dq” töltésű körgyűrű „d $\Phi$ ” potenciálját a „z” forgástengelye mentén pontosan ismerjük. Ezért a szuperpozíció elvének az alkalmazásával a  $\Phi(z)$  potenciálfüggvény meghatározható.

- Formálisan fejtse sorba  $\Phi(z)$  potenciált!
  - Tekintse a  $\Phi(r)$  potenciál multipólus sorfejtését és vegye ennek a „z” tengely mentén felvett értékét!
  - Mutassa meg, hogy ha ismerjük a  $\Phi(z)$  sorfejtését, akkor a  $\Phi(r)$  multipólus sorfejtés is egyértelműen kiszámítható (tetszőleges rendig bezárólag)!
- 

**8.) feladat**

Adott egy „reális dipólus”. A „+Q” ponttöltés az „ $a = +a \cdot e_z$ ” pontban van és a „-Q” a „-a” pontban.

- Ismerjük mind a  $\Phi_+(r)$ , mind pedig a  $\Phi_-(r)$  potenciál (multipól) sorfejtésese alakját, a dipólustól elegendően távol. Írja fel a  $\Phi(r) = \Phi_+(r) + \Phi_-(r)$  potenciált.
  - Adja meg a  $\Phi(r)$  potenciál első két nem zérus tagját!
-