1. gyakorlat
Vektor kalkulus – ismétlés

1. gradiens: $(\mathrm{grad}\phi)_i = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \partial_i\phi = (\underline{\nabla}\phi)_i$

Számítsa ki az alábbi függvények gradiensét ($r = |\underline{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$)!

a. $\sin x_1 \cos x_2 e^{x_3}$

b. $\partial_i r$

c. $\partial_i f(r)$

d. $\partial_i(r^n)$

e. $\partial_i(\underline{a}\cdot\underline{r})$

f. $\partial_i(r^n(\underline{a}\cdot\underline{r})^m)$

2. divergencia: $\mathrm{div}\underline{v} = \partial_i v_i = \underline{\nabla}\cdot\underline{v}$

Számítsa ki az alábbi függvények divergenciáját ($r = |\underline{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$)!

a. $(-\omega x_2, \omega x_1, 0)$

b. $(3x_1^2, 3x_2^2, 3x_3^2)$

c. $\underline{r}$

d. $f(r)\underline{r}$

e. $(\underline{a}\times\underline{r})\times\underline{r}$ $\quad \underline{a}$=áll.

3. Kronecker delta, Levi-Civita szimbólum:

Bizonyítsa be az alábbi összefüggéseket!

a. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

b. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$

c. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

d. $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})(\underline{b}\cdot\underline{c})$

4. rotáció: $(\mathrm{rot}\underline{v})_i = (\underline{\nabla}\times\underline{v})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j v_k$

Számítsa ki az alábbi függvények rotációját ($r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$)!

a. $(-\omega x_2, \omega x_1, 0)$

b. (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2)

c. $f(r)\underline{r}$

d. $(\underline{a}\times\underline{r})\times\underline{r}$ $\quad \underline{a}$=áll.

e. $\underline{u}\times\underline{v}$

f. $\frac{\underline{m\times r}}{r^3}$

5. differenciál azonosságok:

Bizonyítsa be, hogy

a. $\mathrm{rotrot}\underline{v} = \mathrm{graddiv}\underline{v} - \Delta\underline{v}$

b. $\mathrm{grad}(\underline{u}\cdot\underline{v}) = (\underline{u}\mathrm{grad})\underline{v} + (\underline{v}\mathrm{grad})\underline{u} + \underline{u}\times\mathrm{rot}\underline{v} + \underline{v}\times\mathrm{rot}\underline{u}$

c. $\mathrm{rotgrad}\phi = 0$

d. $\mathrm{divrot}\underline{v} = 0$

6. vonalintegrál:

Számítsa ki az alábbi vonalintegrálokat!

a. $\int_C x_1^2 x_3 ds$, ahol C a $(0,6,-1)$ és a $(4,1,5)$ pontot összekötő szakasz.

b. $\int_C \underline{r} \cdot d\underline{s}$, ahol C a 0-ból a P pontba mutató szakasz.

c. $\int_C \underline{r} \times d\underline{s}$, ahol C egy zárt görbe.

Mekkora munkát végez

d. az $\underline{F} = (e^{x_2}, x_1 e^{x_2} + \sin x_3, x_2 \cos x_3)$ erő a $(0,0,0)$ és a $(1,-1,3)$ pontot összekötő szakasz mentén való elmozdítás során?

e. az $\underline{F} = (x_2^2, x_2^2, x_1 x_3)$ erő az $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pályán mozgó testen, az $(1,0,0)$ pontból az $(-1,0,\pi)$ pontba való elmozdítása során?

7. felületi integrál:

Számítsa ki

a. az $\iint\limits_S x_1^2 x_2 x_3 dS$ felületi integrált, ahol S az $x_3 = 1 + 2x_1 + 3x_2$ sík $0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 2$ része!

b. az $\underline{F} = (x_1, 2x_2, 3x_3)$ vektortér fluxusát a $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ csúcsokkal rendelkező kocka felületére!

c. mekkora munkát végez az $\underline{F} = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2)$ erő egy testet az $(x_1 - x_2)$ sík felett, az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ henger és az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ gömb metszésvonalán mozgatva? (**Útmutatás: Használja a Stokes-tételt!)**

8. térfogati integrál:

a. Számítsa ki az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 4$, $x_3 \geq 0$ állandó sűrűségű ($\rho =$áll.) félgömb tömegét!

b. Számítsa ki az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$, $x_3 \geq 0$, $\rho = x_1^2 + x_2^2$ sűrűségű félgömb tömegközéppontját!

c. A Gauss törvény felhasználásával számítsa ki a $\iint\limits_S \underline{F} d\underline{S}$ felületi integrált, ahol $\underline{F} = (x_1 x_2^2, x_2 x_3^2, x_1^2 x_3)$ és S az origó középpontú, 3 sugarú gömb felülete!