Elektromágneses hullámok két közeg határán

Takács Gábor

2016. május 8.

1. A határfeltételek

Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a határfelület legyen az $x = y = 0$ sík, a hullám érkezzen a $z < 0$ oldalon. Legyen a beesési oldalon ($z < 0$) lévő közegben a fény sebessége c, a másik oldalon ($z > 0$) c', ekkor a hullámok a következőképpen írhatók:

$$\begin{aligned}
\text{Beeső hullám } (z<0) \quad &: \quad \vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} \\
\text{Megtört hullám } (z>0) \quad &: \quad \vec{E}' = \vec{E}'_0\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \vec{B}' = \frac{1}{c'}\hat{k}'\times\vec{E}' = \frac{1}{\omega'}\vec{k}'\times\vec{E}' \\
\text{Visszavert hullám } (z<0) \quad &: \quad \vec{E}'' = \vec{E}''_0\, e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \vec{B}'' = \frac{1}{c}\hat{k}''\times\vec{E}'' = \frac{1}{\omega''}\vec{k}''\times\vec{E}''
\end{aligned}$$

ahol

$$\omega = ck \quad \omega' = c'k' \quad \omega'' = ck''$$

és adott $\vec{v}$ vektorra $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$ a $\vec{v}$ irányú egységvektor. Legyen $\vec{n} = \vec{e}_z$ az első közegből a másikba mutató, a határfelületre merőleges normálvektor, ekkor a jellemző szögek:

$$\begin{aligned}
\text{Beesési szög} \quad &: \quad \cos\vartheta = \hat{k}\cdot\vec{n} \\
\text{Törési szög} \quad &: \quad \cos\vartheta' = \hat{k}'\cdot\vec{n} \\
\text{Visszaverődési szög} \quad &: \quad \cos\vartheta'' = -\hat{k}''\cdot\vec{n}
\end{aligned}$$

A $z = 0$-ban érvényes határfeltételek

$$\begin{aligned}
D_n \text{ folytonos} \quad &: \quad \left[\epsilon\left(\vec{E}+\vec{E}''\right) - \epsilon'\vec{E}'\right]\cdot\vec{n} = 0 \\
B_n \text{ folytonos} \quad &: \quad \left[\left(\vec{B}+\vec{B}''\right) - \vec{B}'\right]\cdot\vec{n} = 0 \\
\vec{E}_t \text{ folytonos} \quad &: \quad \left[\left(\vec{E}+\vec{E}''\right) - \vec{E}'\right]\times\vec{n} = 0 \\
\vec{H}_t \text{ folytonos} \quad &: \quad \left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{B}+\vec{B}''\right) - \frac{1}{\mu'}\vec{B}'\right]\times\vec{n} = 0
\end{aligned}$$

2. A törés és visszaverődés szöge

Ezeknek fent kell állniuk minden t-re, ami csak úgy lehetséges, ha

$$\omega = \omega' = \omega'' \Rightarrow k'' = k \text{ és } \frac{k}{k'} = \frac{c'}{c}$$

valamint a határfelület minden pontjában, amiből

$$\left(\vec{k}\cdot\vec{x}\right)_{z=0}=\left(\vec{k}'\cdot\vec{x}\right)_{z=0}=\left(\vec{k}''\cdot\vec{x}\right)_{z=0}\quad\text{minden } x,y\text{-ra}$$

Ebből következően a három hullámszám vektornak a határfelület irányába eső komponense megegyezik. Egyrészt ebből következően a visszavert és a megtört sugár benne van a beesés síkjában, amit a beeső sugár és a normálvektor határoz meg (kivéve merőleges beesésnél, amikor nincs beesési sík, de mindegyik merőleges a határfelületre), Másfelől

$$k\sin\vartheta=k'\sin\vartheta'=k''\sin\vartheta''$$

Mivel a szögek értelmezési tartománya esetünkben $[0,\pi/2]$, ezért egyfelől

$$\vartheta=\vartheta''$$

azaz a beesés és a visszaverődés szöge megegyezik, ezen felül pedig

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{c}{c'}$$

ami a Snellius-Descartes törvény.

3. Az amplitúdókra vonatkozó egyenletek

Az amplitúdókra vonatkozó egyenleteket megkapjuk akkor, ha a határfeltételeket felírjuk $t=0$ és $\vec{x}=0$ esetére:

$$\begin{aligned}
(I)\qquad & \left[\epsilon\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''\right)-\epsilon'\vec{E}_0'\right]\cdot\vec{n}=0\\
(II)\qquad & \left[\left(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)-\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right]\cdot\vec{n}=0\\
(III)\qquad & \left[\left(\vec{E}_0+\vec{E}_0''\right)-\vec{E}_0'\right]\times\vec{n}=0\\
(IV)\qquad & \left[\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0+\vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)-\frac{1}{\mu'}\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right]\times\vec{n}=0
\end{aligned}$$

Adott beeső hullám amplitúdó ($\vec{E}_0$) mellett ezek inhomogén lineáris egyenletet jelentenek 6 ismeretlenre ($\vec{E}_0'$ és $\vec{E}_0''$), mégpedig pontosan 6 független egyenletet (a normális irányúaknak 1-1, a tangenciálisaknak 2-2 független komponense van), amelyek megoldása egyértelmű. A szuperpozíció elve miatt ezek megoldását szétbonthatjuk két esetre.

3.1. A beesés síkjára merőleges polarizáció esete

Ekkor

$$\left(\vec{E}_0,\vec{E}_0',\vec{E}_0''\right)\perp\left(\vec{n},\vec{k},\vec{k}',\vec{k}''\right)$$

Ilyenkor (I) triviális.

A (II) egyenletből a vegyes szorzat tulajdonságait kihasználva kapjuk, hogy

$$\left(\vec{n}\times\vec{k}\right)\cdot\vec{E}_0+\left(\vec{n}\times\vec{k}''\right)\cdot\vec{E}_0''-\left(\vec{n}'\times\vec{k}'\right)\cdot\vec{E}_0'=E_0k\sin\theta+E_0''k''\sin\theta''-E_0'k'\sin\theta'=0$$

Másrészt (III) ilyenkor

$$(IIIa) \quad E_0 + E_0'' - E_0' = 0$$

A törés és a visszaverődés törvényei miatt ez a két egyenlet ekvivalens. A kifejtési tételt használva (IV)-ből pedig adódik, hogy

$$\frac{1}{\mu}\left(\vec{n}\cdot\vec{k}\right)\vec{E}_0 + \frac{1}{\mu}\left(\vec{n}\cdot\vec{k}''\right)\vec{E}_0'' - \frac{1}{\mu'}\left(\vec{n}\cdot\vec{k}'\right)\vec{E}_0' = 0$$

azaz

$$\frac{1}{\mu}kE_0\cos\vartheta - \frac{1}{\mu}kE_0''\cos\vartheta - \frac{1}{\mu'}k'E_0'\cos\vartheta' = 0$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{k'}{k} = \frac{c}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon'\mu'}{\epsilon\mu}}$$

kapjuk, hogy

$$(IVa) \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0''\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0'\cos\vartheta' = 0$$

$(IIIa)$ és (IVa) megoldása

$$t = \frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'}$$

$$r = \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'}$$

3.2. A beesés síkjában polarizált hullám esete

Ekkor

$$\left(\vec{E}_0, \vec{E}_0', \vec{E}_0''\right) \text{ benne van az } \left(\vec{n}, \vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''\right) \text{ síkban}$$

és (II) triviális, minden mindhárom vegyes szorzat eltűnik. (I)-ből

$$\epsilon\sin\vartheta\left(E_0 + E_0''\right) - \epsilon' E_0'\sin\vartheta' = 0$$

A (IV) egyenletben lévő összes vektor szorzat szöge derékszög, csak a jobbkezességet kell figyelni, így adódik

$$\frac{1}{\mu}k\left(E_0 + E_0''\right) - \frac{1}{\mu'}k'E_0' = 0$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{k'}{k} = \frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{\epsilon'\mu'}{\epsilon\mu}}$$

és

$$k\sin\vartheta = k'\sin\vartheta'$$

kapjuk, hogy

$$\frac{k/\mu}{k'/\mu'} = \frac{k^2}{k'^2}\frac{\mu'}{\mu}\frac{k'}{k} = \frac{\epsilon\mu}{\epsilon'\mu'}\frac{\mu'}{\mu}\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{\epsilon\sin\vartheta}{\epsilon'\sin\vartheta'}$$

azaz (I) és (IV) nem független. A megoldandó egyenletek

$$\begin{array}{ll} (IIIa) \qquad & E_0 \cos\vartheta - E_0'' \cos\vartheta - E_0' \cos\vartheta' = 0 \\ (IVa) \qquad & \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,(E_0 + E_0'') - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E_0' = 0 \end{array}$$

Innen

$$\begin{aligned} t = \frac{E_0'}{E_0} &= \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta' + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta} \\ r = \frac{E_0''}{E_0} &= \frac{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta' - \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta' + \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta} \end{aligned}$$

4. Energiamérleg

A Poynting vektorok határra merőleges komponenseiből számított energiaáramsűrűségek

$$\begin{aligned} S_\perp &= \frac{1}{c\mu} E_0^2 \cos\vartheta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos\vartheta \\ S_\perp' &= \frac{1}{c\mu} {E_0'}^2 \cos\vartheta = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} t^2 E_0^2 \cos\vartheta' \\ S_\perp'' &= \frac{1}{c\mu} E_0''^2 \cos\vartheta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} r^2 E_0^2 \cos\vartheta \end{aligned}$$

Az energiamérleg, azaz a határfelületre beszállított és onnan elvitt energia egyenlősége azt követeli meg, hogy

$$S_\perp = S_\perp' + S_\perp''$$

Ez viszont ekvivalens azzal, hogy

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta = r^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\cos\vartheta + t^2 \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}\cos\vartheta'$$

ami mindkét esetben teljesül.