# 1. kis-ZH feladatok

1. Egy rugalmas gumiszál egyik végét egy vízszintes, súrlódásmentes asztalhoz szögeltük, a másik végére egy $m$ tömegű kicsiny tömegpontot erősítettünk. A gumiszál nyújtatlan hossza elhanyagolható, a benne ébredő feszítőerő a megnyúlással arányos, ezért a tömegpont egy

$$V(r) = \frac{1}{2} D\, r^2$$

centrális potenciálban mozoghat.

   (a) Írja fel a tömegpont mozgásegyenletét, síkbeli polárkoordinátákat használva úgy, hogy az origó a vonzó potenciál centrumában legyen!

   (b) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont $L$ perdületét, adja meg a sugárirányú mozgást meghatározó $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (c) Rajzolja fel a $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (d) Ismerjük a tömegpont $E$ energiáját és $L$ perdületét. Adjuk meg ezek (valamint a $D$ és $m$ paraméterek) segítségével a tömegpont mozgása során mért $r_{\min}$ és $r_{\max}$ minimális és maximális origótól mért távolságokat!

---

2. Súrlódásmentes vízszintes asztal közepén egy kicsiny lyukat fúrtunk. A lyukon átvezettünk egy vékony madzagot, ami a lyukon keresztül súrlódásmentesen mozoghat. Az madzag asztal feletti végére kötöttünk egy $m$ tömegű tömegpontot, az asztal alatti végét pedig időben állandó $F_0$ erővel húzzuk!

   (a) A fenti elrendezésben a tömegpontra mindig $F_0$ nagyságú vonzóerő hat a centrum irányában. Adja meg az erőtér $V(r)$ potenciálját!

   (b) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont $L$ perdületét, adja meg a sugárirányú mozgást meghatározó $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

   (c) Rajzolja fel a $V_{eff}(r)$ effektív potenciált!

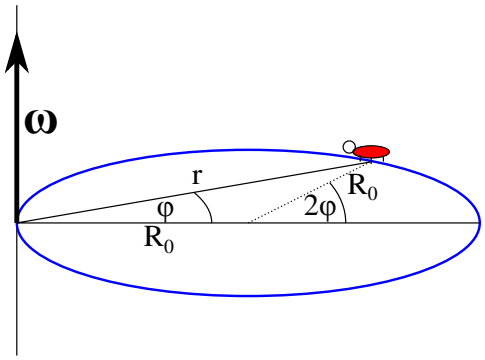
   (d) Adott $L$ perdület esetén adja meg, milyen $r_0$ sugarú egyenletes körmozgást végezhet a test? Mekkora a $T_{circ}$ keringési idő?

   (e) Az előbbi körpályán mozgó testet kicsit meglöktük, ezért a körpálya körül oszcilláló mozgást végez. Adja meg az oszcilláció $T_{oszc}$ periódusidejét! Hogy viszonyul ez $T_{circ}$-hez?

---

3. Egy $R_0$ sugarú vízszintes síkban fekvő hullahopp-karika egyik kerületi pontját egy függőleges tengelyhez rögzítettük, majd a tengely körül forgatjuk állandó $\omega_0$ szögsebességgel. A tengelyhez képest a karika átellenes pontján van egy $m$ tömegű bogár, aki a karikához képest állandó $v_0$ nagyságú sebességgel mászik az ábrán jelölt irányban. A bogár mozgását a karika síkját leíró, a karikával együtt forgó polárkoordinátarendszerrel követjük, aminek origója a függőleges tengelynél található és a körpálya tengelyen átmenő átmérője jelöli ki a $\varphi = 0$ irányt.

   (a) Mutassa meg, hogy a körpálya polárkoordinátás egyenlete $r(\varphi) = A\cos(\varphi)$! Adja meg az $A$ állandót! (Az ábrán rejtett segítség található. :) )




(b) Feltéve, hogy ismeri a $\dot{\varphi}$ időderiváltat, írja fel a körpályán mozgó bogár sebességvektorát az $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ bázisban!

(c) Mutassa meg, ha a bogár sebességének nagysága (a karikához képest) $v_0$ állandó nagyságú, úgy $\dot{\varphi}$ is állandó nagyságú. Adja meg $\dot{\varphi}$-t ebben az esetben!

(d) A forgó koordinátarendszerben a bogárra tehetetlenségi erők hatnak. Sorolja fel ezen tehetetlenségi erőket, és adja meg őket!

(e) Mennyi munkát kell végeznie a bogárnak, amíg kicsiny $v_0$ sebességgel mászva eljut az origóba?

---

## 2. Gyakorló feladatok

Gy1. Egy vízszintes síkon elhelyeztünk egy ún. exponenciális spirál alakú drótpályát, aminek polárkoordinátás egyenlete az alábbi alakú:

$$r(\varphi) = R_0 e^{k\varphi} \ ,$$

ahol $R_0$ egy hosszúság dimenziójú konstans. A spirálra egy $m$ tömegű kicsiny gyöngyszemet fűztünk, ami súrlódásmentesen mozoghat a spirálon. A gyöngyszemet a $\varphi = 0$ helyzetből elindítottuk $v_0$ nagyságú sebességgel. Mivel a nincs súrlódás, ezért mozgása során a gyöngyszem sebességének nagysága nem változik.

(a) Feltéve, hogy a pálya egy adott $\varphi$ helyzetű pontjában ismeri a gyöngyszem $\dot{\varphi}$ szögsebességét, adja meg a gyöngyszem sebességvektorát.

(b) Tudjuk, hogy a mozgása során a gyöngyszem sebességének nagysága állandó, $v_0$. Ezt kihasználva adja meg a gyöngyszem $\dot{\varphi}$ szögsebességét a $\varphi$ helyzet függvényében!

(c) Oldja meg az így nyert differenciálegyenletet, azaz adja meg a $\varphi(t)$ függvényt! Használja ki a korábban megadott kezdeti feltételt!

(d) Adja meg a gyöngyszem origóra vonatkoztatott perdületének $L(t)$ nagyságát az idő függvényében!

(e) Láthatóan a perdület nem marad meg. Milyen erő forgatónyomatéka okozza a perdület megváltozását?

(f) Adja meg az említett erő nagyását az idő függvényében!

---