Mind a négy feladat 25 pontot ér, az elégséges ponthatára 40 pont.

1. Egy tömegpont egyenesvonalú egyenletes mozgást végez v_0 sebességgel az origótól d távolságra elhaladó egyenes mentén. A mozgást síkbeli polárkoordinátarendszerrel írjuk le, melynek $\varphi = 0$ irányát úgy választottuk meg, hogy az egyenes pálya origóhoz legközelebbi pontja ebbe az irányba essen. A tömegpont a $t = 0$ időpontban éppen ezen legközelebbi pontban tartózkodik.

   (a) Írja fel az egyenes pálya $r(\varphi)$ polárkoordinátás egyenletét!

$$cos\varphi = \frac{d}{r}$$

$$r(\varphi) = \frac{d}{cos\varphi}$$

   (b) Feltéve, hogy ismeri a $\varphi(t)$ függvényt, írja fel a segítségével (a pályaegyenletet is kihasználva) a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{r}\boldsymbol{e_r} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e_\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e_r} + r\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{e_\varphi} = d\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}\boldsymbol{e_r} + \frac{d}{\cos\varphi}\dot{\varphi}\boldsymbol{e_\varphi}$$

   (c) Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó v_0 nagyságú, adja meg a tényleges $\varphi(t)$ függvényt!

$$v_0 = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{d^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\dot{\varphi}^2 + \frac{d^2}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}^2} =$$

$$= \frac{d}{\cos\varphi}\dot{\varphi}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} + 1} = \frac{d}{\cos\varphi}\dot{\varphi}\sqrt{\tan^2\varphi + 1}$$

   azaz

$$\frac{d}{\cos\varphi}\dot{\varphi}\sqrt{\tan^2\varphi + 1} = v_0$$

   az alábbi szeparálható differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi\sqrt{\tan^2\varphi + 1} = \frac{v_0}{d}dt$$

$$\int \frac{1}{\cos\varphi}d\varphi\sqrt{\tan^2\varphi + 1} = \int \frac{v_0}{d}dt$$

$$\tan\varphi = \frac{v_0}{d}t$$

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{v_0}{d}t\right)$$

   (d) Az előző alfeladatban meghatározott $\varphi(t)$ függvény segítségével adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban!

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{v_0}{d}t\right)^2}\frac{v_0}{d}$$

és

$$\sin(\arctan x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$\cos(\arctan x)\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

felhasználásával:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \left(d\frac{\sin(\arctan(\frac{v_0}{d}t))}{\cos^2(\arctan(\frac{v_0}{d}t))}\frac{dv_0}{d^2+v_0^2t^2}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(d\frac{1}{\cos(\arctan(\frac{v_0}{d}t))}\frac{dv_0}{d^2+v_0^2t^2}\right)\boldsymbol{e_\varphi} =$$

$$= \left(d\frac{\frac{\frac{v_0}{d}t}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}}}{\frac{1}{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}}\frac{dv_0}{d^2+v_0^2t^2}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(\frac{d}{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}}}\frac{dv_0}{d^2+v_0^2t^2}\right)\boldsymbol{e_\varphi} =$$

$$= \left(\frac{dv_0}{d^2+v_0^2t^2}v_0t\sqrt{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(\frac{d^2v_0}{d^2+v_0^2t^2}\sqrt{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}\right)\boldsymbol{e_\varphi} =$$

$$= \left(\frac{v_0^2t}{d}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}}\right)\boldsymbol{e_r} + \left(v_0\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_0}{d}t\right)^2+1}}\right)\boldsymbol{e_\varphi}$$

---

2. Súrlódásmentes vízszintes asztal közepén egy kicsiny lyukat fúrtunk. A lyukon átvezettünk egy vékony madzagot, ami a lyukon keresztül súrlódásmentesen mozoghat. Az madzag asztal feletti végére kötöttünk egy m tömegű tömegpontot, az asztal alatti végére pedig egy M tömegű téglát kötöttünk, ami függőlegesen mozoghat fel/le.

   (a) Írjuk fel a két test mozgásegyenletét! Az asztalon lévő test mozgását síkbeli polárkoordinátarendszerben írjuk le. Az asztal síkjában mozgó m tömegű test lyuktól mért távolságát jelölje r. A fonál elegendően hosszú, így nem kell aggódnunk amiatt, hogy a lelógó tégla az asztal lapjának ütközik.

   Jelölje az asztalon lévő test pozícióját az (r,φ) páros! Ekkor a tégla pozícióját, amely egydimenziós, $-r$ írja le. A tégla mozgásegyenlete:

   $$Mg - K = M\ddot{r},$$

   ahol K a kötélerő. Az asztalon lévő test egyenlete:

   $$K\mathbf{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$$

   Amiből:

   $$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \tag{1}$$
   $$(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = Mg \tag{2}$$

(b) Használjuk ki a perdületmegmaradást! Írjuk fel az $r(t)$ sugárirányú mozgást leíró mozgásegyenletet!

Perdülete csak az asztalon lévő testnek van legyen az L. Az r irányú mozgás során viszont mindkét test mozog így az r irányú effektív tömeg $m + M$. Tehát

$$E = \frac{p_r^2}{2(m+M)} + \frac{L^2}{2mr^2} + Mgr$$

Illetve

$$(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = Mg$$

(c) Mutassuk meg, hogy a mozgásegyenlet formailag megfeleltethető egyetlen tömegpont centrális potenciálban való mozgásával. Mekkora ennek a tömegpontnak a tömege? Mi az effektív potenciál?
Az (2) egyenlet alapján az effekt1v potenciál

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + Mgr$$

A test effektív tömege pedig a két test tömegének összege, azaz $m + M$.

(d) Ha ismerjük a rendszer E energiáját és L perdületét, akkor milyen $[r_{min}, r_{max}]$ értékek között változik az asztalon lévő test lyuktól mért távolsága a mozgás során?

Az

$$E = Mgr + \frac{L^2}{2mr^2}$$

egyenlet három gyöke közül kettő pozitív, azok határozzák meg r_{min} és r_{max} értékét. Nem kellett kiszámolni az 5 pontért.

(e) Mi a feltétele annak, hogy az asztalon lévő tömegpont egyenletes körmozgást végezzen? Ha a perdület L, mekkora a körpálya sugara?
A körpálya akkor lehetséges, ha az effektív potenciálnak szélsőértéke van:

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = 0$$

$$Mg - \frac{L^2}{mr_k^3} = 0$$

$$r_k = \sqrt[3]{\frac{L^2}{Mmg}} \tag{3}$$

(f) **(Bónusz +5p)** Mutassuk meg, hogy a körpálya stabilis. Kicsit kitérítve róla a tömegpontot, milyen periódusidejű oszcillációkat végez a körpálya körül? Hogy viszonyul ez a körmozgás periódusidejéhez?

Az effektív potenciál második deriváltjának pozitívnak kell lennie, ami teljesül:

$$\frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2} = +\frac{3L^2}{mr^4} > 0$$

A rezgés periódusidejét az effektív potenciál sorfejtéséből kapjuk:

$$\omega_r = \frac{3L^2}{mr_k^4}$$

ahol r_k-t (3) egyenletből beírhatjuk. Tudván, hogy ekkor $L = mr_k^2\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}$ szögsebességből megkaphatjuk a körmozgás periódusidejét.

---

3. Egy m tömegű tömegpont mozgását vizsgáljuk az ábrán is vázolt centrális potenciálban, ahol az R_1 és R_2 sugarú héjak között a potenciál nagysága $V_0 > 0$ egyébként 0, azaz

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } r < R_1 \\ V_0 & \text{, ha } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{, ha } R_2 < r \end{cases} .$$

(a) Feltéve, hogy ismeri a tömegpont impulzusmomentumának L nagyságát, írja fel a sugárirányú mozgásra jellemző $V_{eff}(r)$ effektív potenciált! Rajzolja is fel a $V_{eff}(r)$ függvényt!

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Lásd a $3/a$ ábrát!

(b) A feladat első részében kötött mozgásokat keresünk. Ha ismerjük a tömegpont L perdületét, adjuk meg azt az E_{min} és E_{max} energiákat, amik közötti $E \in [E_{min}, E_{max}]$ energiákon kialakulhat kötött mozgás.

Kötött mozgás a lenti ábrán, pirossal jelölt tartományban alakulhat ki,

$$E_{min} = \frac{L^2}{2mR_1^2}$$

és

$$E_{max} = \frac{L^2}{2mR_1^2} + V_0$$

energiák között.

(c) Vázoljuk egy kötött mozgás esetén a tömegpont pályáját.

Lásd a $3/c$ ábrát!

(d) Most tekintsük azt az esetet, amikor a tömegpont szóródik ezen a centrális potenciálon. Legyen a részecske energiája E, és az impakt paramétere b (lásd ábra)! Írja fel a $V_{eff}(r)$ effektív potenciált, hogy most benne L perdület helyett a b és E mennyiségek jelenjenek meg!

$E = \frac{1}{2}mv_0^2$ és $L = mv_0 b$ felhasználásával.

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = V(r) + \frac{m^2v_0^2b^2}{2mr^2} = V(r) + E\frac{b^2}{r^2}$$

(e) Adott b esetén mekkora az a minimális E_{min} energia, aminél nagyobb $E > E_{min}$ energiájú tömegpont bejut a belső héjon belülre, azaz az $r < R_1$ tartományba?

$$E_{min} = V_0 + E_{min}\frac{b^2}{R_1^2}$$

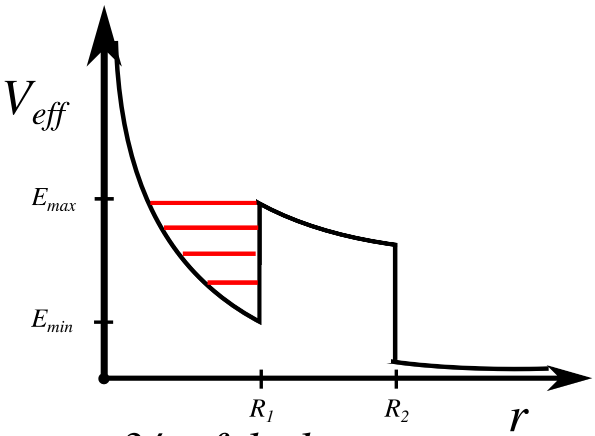
$$E_{min} = \frac{V_0}{1 - \frac{b^2}{R_1^2}},$$

$b < R_1$ esetén

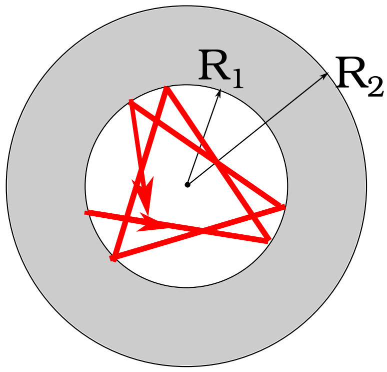
(f) **(Bónusz +5p)** Az előző feladatban szereplő, elegendően nagy ($E > E_{min}$) energia esetén mekkora r_0 távolságra közelíti meg a tömegpont a gömb középpontját?

$$E = V_{eff} = E\frac{b^2}{r_0^2},$$

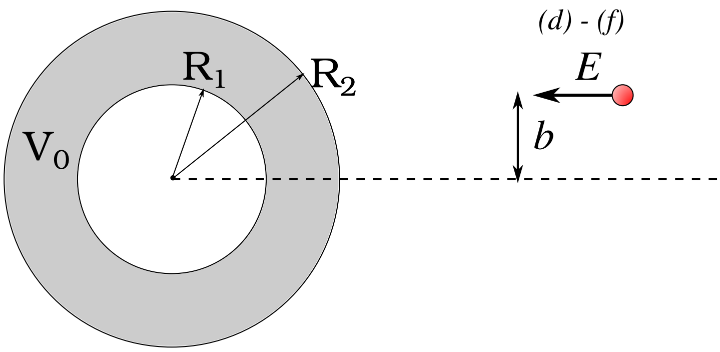
amiből $r_0 = b$.



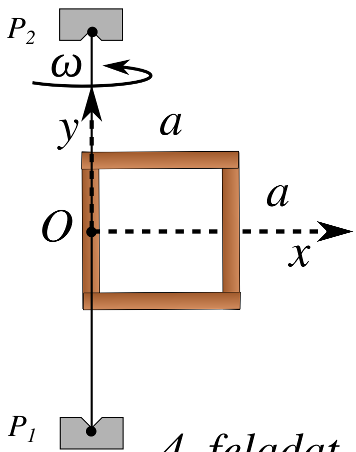
3/a. feladat



3/c. feladat



3. feladat



4. feladat

---

4. Egy homogén, m tömegű a oldalhosszúságú, négyzet alakú keretet egy függőleges tengelyhez rögzítettünk az ábrán látható módon. A függőleges irány jelöli ki az y tengelyt, az origó az ábrán jelölt pozícióban található. A vizsgált időpillanatban a keret éppen az $x - y$ síkban található, és ω szögsebességgel forog az y tengely körül. Az OP_1 és OP_2 szakasz egyenlő hosszúságú.

   (a) Adja meg a vizsgált időpillanatban a rúd origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték tenzorát!
   Mivel az objektum síkbeli, ezért $z \equiv 0$, azaz $\theta_{xz} = \theta_{yz} = 0$.
   Mivel az objektum tükörszimmetrikus az x tengelyre, ezért $\theta_{xy} = 0$. (Az $x > 0$ rész járuléka ugyanaz, mint az $x < 0$ járuléka csak ellentétes előjellel. Tudjuk, hogy xy síkobjektumoknál

$\theta_{zz} = \theta_{xx} + \theta_{yy}$, ezért csak az utóbbi kettőt kell kiszámítani. Legyen $\rho = m/(4a)$ a vonalsűrűség!

$$\theta_{xx} = 2\rho\int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy + 2\rho\int_0^a a^2/4dx = 2\rho\left(\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} + \frac{a^3}{4}\right) = \frac{2}{12}ma^2$$
$$\theta_{yy} = 2\rho\int_0^a x^2dx + \rho a^3 = \rho\left(\left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^a + a^3\right) = \frac{5}{12}ma^2 \tag{4}$$

Ebből $\theta_{zz} = \frac{7}{12}ma^2$.

(b) A szögsebesség ismeretében adja meg a rúd origóra vonatkozó perdületvektorát ugyanebben a pillanatban!
A szögsebesség y irányú, tehát

$$\mathbf{L} = \theta\boldsymbol{\omega} = \frac{5}{12}ma^2\begin{pmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{pmatrix}$$

(c) Adja meg a rúd (forgási) energiáját!

$$E_f = \frac{1}{2}m\boldsymbol{\omega}\theta\boldsymbol{\omega} = \frac{5}{12}ma^2\omega^2$$

(d) Adja meg a P_1 és P_2 pontokban ébredő erőket! Először vizsgáljuk meg a forgatónyomatékot. A rögzített tengely körül forgó test perdülete együtt forog a testtel. A forgatónyomaték tehát:

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$$

Azonban mivel $\mathbf{L}||\boldsymbol{\omega}$ A fogatónyomaték zérus, ahogy azt várjuk is egy forgástengelyre merőlegesen tükörszimmetrikus testnél.

A keret tömegközéppontja azonban nem a tengelyre esik, ezért kell centripetális erő, ami azt körpályán tartja. A test tömegközéppontja $a/2$ távilságra van a tengelytől:

$$F_cp = m\frac{a}{2}\omega^2$$

(e) Adja meg a keret tömegközéppontjára vonatkozó tehetetlenségi tenzorát!
A tömegközéppont koordinátája

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix}a/2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

A Steiner-tétel alapján θ-ből kivonandó mátrix:

$$D = m\frac{a^2}{4}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$