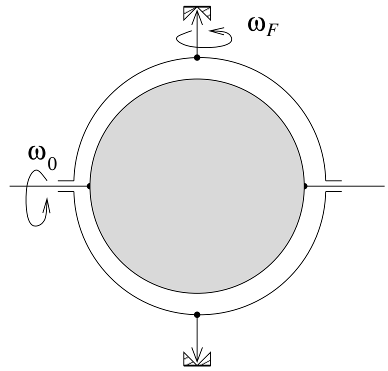
1. kis-ZH feladatok

1. Adott egy m tömegű, R sugarú, homogén tömegeloszlású gömb. (Lásd az ábrát!) A gömb középpontján egy (tömegtelen) merev pálca megy át, mely tengely körül a gömb súrlódásmentesen foroghat. Adott egy $a > R$ sugarú, ugyancsak tömeg nélküli, kör alakú, merev keret. A keretre (az átmérőjének a mentén) két csapágyat erősítettünk, amelyekben a gömb tengelye szabadon foroghat. A keretnek e tengelyre merőleges átmérőjének megfelelően kifelé mutató két féltengelyt erősítettünk. A két féltengelyt, függőlegesen beállítva, egy álló csapágypárral függőleges helyzetben tartjuk, miközben az is szabadon foroghat. A gömb (tömegközéppontra vonatkozó) tehetetlenségi nyomaték tenzora $\underline{\underline{\Theta}} = \theta\,\underline{\underline{\mathbf{1}}}$, ahol $\underline{\underline{\mathbf{1}}}$ a 3×3-as egységmátrixot jelöli, továbbá $\theta = \frac{2}{5}mR^2$. A problémát érdemes a kerethez rögzített koordinátarendszerből vizsgálni, azaz a z tengely legyen függőleges, az y tengelyt jelölje ki a gömbön átszúrt pálca, az x tengely pedig szintén vízszintes és merőleges a pálcára. Az origó legyen a gömb középpontja.



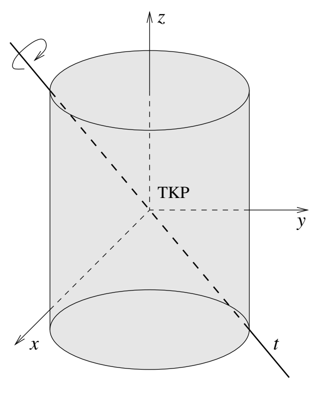
   (a) A gömb a vízszintes tengelye körül, állandó, ω_0 szögsebességgel forog, miközben a keret nyugalomban van. Adja meg a gömb szögsebességvektorát perdületvektorát a fent leírt koordinátarendszerben.

   (b) Forgassuk meg a keretet a függőleges tengely körül ω_F állandó szögsebességgel! Adja meg a gömb teljes ω szögsebességvektorát a fent leírt, tehát a kerethez rögzített koordinátarendszerben!

   (c) Adja meg a perdületvektort is a (b) feladat szögsebessége esetén.

   (d) Írja fel a perdületre vonatkozó mozgásegyenletet. Mivel a kerethez rögzített rendszerben a szögsebesség állandó, így a perdület is az lesz, azaz a perdületvektor együtt forog a kerettel. Ez alapján adja meg a keretet rögzítő (függőleges tengelynél lévő) csapágyak által kifejtett forgatónyomaték-vektort!

2. Adott egy R sugarú kör keresztmetszetű, H magasságú, homogén tömegeloszlású, m tömegű, tömör henger. A henger szimmetriatengelye legyen a z tengely. Az origó a tömegközéppontban van.



   (a) Határozza meg a θ_{ij} TKP tehetetlenségi mátrixot a tömegközépponti fő tehetetlenségi (azaz az $x - y - z$ koordináta-) rendszerben!

Tekintsük azt a t tengelyt, amelyik átmegy a henger TKP tömegközéppontján, az (y, z) síkban van és illeszkedik az alapkör kerületére. A henger állandó ω_0 szögsebességgel forog az álló, csapágyazott t tengely körül.

(b) Határozza meg az $\underline{\omega}$ szögsebességvektort, majd ennek ismeretében az $\underline{L}$ perdületvektort!

(c) A perdülettétel alkalmazásával határozza meg a csapágyak által kifejtett eredő forgatónyomaték $\underline{N}$ vektorát!

(d) Legyen az m tömegű henger geometriája olyan, hogy $H = kR$, ahol k pozitív szám. Rajzolja fel az $|\underline{N}(k)|$ függvényt!

3. A gyakorlaton szereplő „gyufás-skatulyás" kísérletet egy CD-lemezzel végezzük el, azaz egy forgásszimmetrikus lemez szabad forgásait vizsgáljuk. A forgásszimmetria miatt a lemez két főtehetetlenségi-nyomatéka egyenlő, a $\underline{\underline{\Theta}}^{\mathrm{TK}}$ tenzor a főtehetetlenségi-rendszerben

$$\underline{\underline{\Theta}}^{\mathrm{TK}} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 \end{pmatrix}$$

alakba írható. A mozgást a CD-lemezzel együttforgó koordinátarendszerben vizsgáljuk.

(a) Írja fel az Euler-egyenleteket a rendszerre!

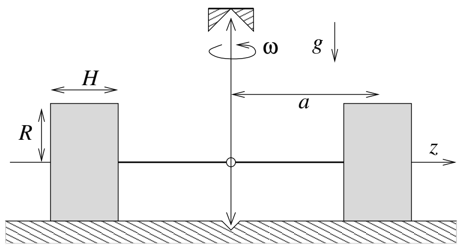
(b) Mutassa meg, hogy a θ_1 tengelyhez tartozó ω_1 szögsebesség állandó!

(c) Tekintse az ω_2-re és ω_3-ra vonatkozó egyenleteket. Használja ki, hogy ω_1 állandó, ennek segítségével használja ki, hogy az ω_2-re és ω_3-ra vonatkozó egyenletrendszer lineáris. Adja meg az egyenletrendszer általános megoldását!

(d) Stabilis-e az θ_1-nek megfelelő tengely körüli forgás? És a másik két tengely körüli forgás?

2. Gyakorló feladatok

Gy 1 Az ábrán az ún. zúzómalom vázlata látható. A hengerek sugara R, a vastagságuk H, a tömegük m. Legyen $H \ll R$, azaz a hengerek koronggal közelíthetők. A függőleges, f forgó tengelyhez csuklóval kapcsolódó, vízszintes helyzetű féltengelyek hossza a. (Az a-t a hengerek TKP tömegközéppontjától mérjük.) A korongok a vízszintes felületen csúszásmentesen gördülnek. A szimmetria miatt elegendő csak az egyik korong mozgását vizsgálnunk.



(a) Válassza ki az egyik korongot! Határozza meg a korongnak a függőleges f tengelyre vett θ_f és a vízszintes t forgástengelyre vett θ_t tehetetlenségi nyomatékát!

(b) A függőleges f tengelyt állandó ω_f szögsebességgel forgatjuk. Határozza meg a korong t tengely körüli forgását megadó ω_t szögsebesség vektort! A mozgó korongnak a csuklópontra vonatkozó $\mathbf{L}_0$ eredő perdülete két tagból áll.

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_t + \mathbf{L}_f,$$

ahol az első tag a t körüli forgásból, a második az f körüli forgásból származik.

(c) A θ_f , a θ_t, valamint a szögsebességek ismeretében határozza meg a két perdület összetevő nagyságát!

(d) Vázolja fel egy alkalmas vektorábra segítségével az $\mathbf{L_0}$ perdületvektornak az álló rendszerhez viszonyított precessziós mozgását!

(e) A vektorábra alapján határozza meg az álló rendszerben megfigyelhető **L** időderiváltat!

(f) A perdülettétel felhasználásával határozza meg, hogy a forgás miatt a vízszintes felület mekkora F erővel nyomja a hengert!

(g) Mekkora ω_f szögsebességgel kell forgatni a függőleges tengelyt, ha azt akarjuk, hogy a henger $2mg$ erővel nyomja a vízszintes felületen lévő zúzandó anyagot?

(h) Extra! Oldja meg a feladatot egy a tengellyel együtt forgó koordinátarendszerben is!

Gy 2 Mint az ismeretes, egy merev test szabad forgása esetén két mozgásállandó van. (Az esetlegesen fellépő egyenesvonalú transzlációs mozgástól most eltekintünk!) A mozgásállandók A forgási (kinetikus) energia

$$E_{FR} = E_0 = \text{const}$$

A perdület (vektor)

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \text{const}$$

Forogjon a merev test ω szögsebességgel. Ez a szögsebesség a testhez rögzített fő tehetetlenségi rendszerben legyen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

(a) Mutassa meg, hogy a megmaradási egyenleteket kielégítő (lehetséges) ω szögsebesség vektorok végpontjai egy ellipszoidon vannak!

(b) Ha mindkét megmaradási tételt ki akarjuk elégíteni, akkor az ω szögsebesség vektornak a két ellipszoid közös pontjain kell lennie. Geometriai megfontolásokkal vázolja fel, hogy mikor, milyenek lehetnek ezek a közös pontok, vonalak?

Gy 3 **Beadható:** Egy M tömegű, R sugarú neutroncsillag lassú rezgéseket végez úgy, hogy fő tehetetlenségi nyomatékai periodikusan változnak az alábbi módon:

$$\theta_{xx} = \theta_{yy} = \frac{2}{5}MR^2\left(1 - \varepsilon\frac{\cos\omega t}{2}\right)$$
$$\theta_{zz} = \frac{2}{5}MR^2\left(1 + \varepsilon\cos\omega t\right)$$

A csillag $\mathbf{\Omega}(t)$ szögsebességgel forog, Legyen $\mathbf{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$!

(a) Mutassa meg, hogy az $\Omega_z(t)$ jó közelítéssel állandó!

(b) Mutassa meg, hogy az $\mathbf{\Omega}(t)$ szögsebesség a z tengely körül egy $\Omega_N \gg \omega$ körfrekvenciával forog (ezt nevezzük nutációnak) és határozza meg az Ω_N-t!