

1. kis-ZH feladatok

1. Micimackó mézesüvegébe egy méhecske szorult, aki belesüllyedt a mézbe. Amikor Micimackó a kredencből előveszi az üveget, úgy találja, hogy a méhecske a mézbe teljesen elsüllyedve lebeg. Micimackó kísérletezni kezd a méhecskével, amiből kiderül számára, hogy a méhecske elektromosan töltött, töltése q . A méhecske tömege m , sűrűsége a mézével egyező (hiszen lebeg benne). Micimackó ezután a következő kísérletet végzi: egy igen nagy síkkondenzátor lemezei közé helyezi



az üveget. A kondenzátor lapjait egy nagy ellenálláson keresztül összeköti. A $t = 0$ időpillanatban a kondenzátort hirtelen feltölti, majd hagyja kisülni az ellenálláson keresztül, ezért a mézesüvegben időben exponenciálisan csökkenő, homogén elektromos tér alakul ki, aminek iránya jelöli ki az x tengelyt,

$$E(t) = \Theta(t) E_0 e^{-t/\tau},$$

ahol a $\Theta(t)$ egységugrás függvénnyel jeleztük, hogy $t < 0$ esetén a térerősség zérus. A mézben a $qE(t)$ elektromos erőn kívül a méhecskére hat egy $F_{cs} = -k\dot{x}$ fékezőerő is. A méhecske a $t = 0$ időpillanatban állt. Írja le a méhecske mozgását!

- Írja fel a méhecske sebességére (\dot{x} -ra) vonatkozó mozgásegyenletet! Láthatóan ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet.
- Először tegye fel, hogy nincs külső elektromos tér, azaz tekintse a homogén egyenletet. Adja meg az egyenlet Green-függvényét!
- Most tekintse a korábban felírt exponenciálisan lecsengő külső elektromos teret. A Green-függvény segítségével adja meg a méhecske $\dot{x}(t)$ sebesség-idő függvényét ebben az esetben!
- Mekkorának méri Micimackó a méhecske teljes Δx elmozdulását a kísérlet végén?

2. Egy részecskét olyan közegbe lövünk, ahol rá a sebességének négyzetével arányos $F_{cs} = -k\dot{x}^2$ fékezőerő hat. A részecske tömege m , és a $t = 0$ időpillanatban v_0 sebességgel indul az $x = 0$ pontból. Írja le a részecske mozgását!

- Írja fel a részecske Newton-féle mozgásegyenletét!
- A kezdeti feltételeket figyelembe véve adja meg a részecske $\dot{x}(t)$ sebesség-idő függvényét! Rajzolja fel a függvényt!
- A sebesség-idő függvény integrálásával, a kezdeti feltételek ismeretében adja meg a részecske $x(t)$ hely-idő függvényét! Rajzolja fel!
- Mekkora utat tesz meg a részecske, ameddig megáll?

3. Egy tömegpont egydimenziós mozgást végez az alábbi potenciálban:

$$V(x) = -Ax + Bx^3,$$

ahol $A > 0$ és $B > 0$ pozitív konstansok. Vizsgálja a tömegpont mozgását!

- (a) Vázolja a $V(x)$ potenciált!
- (b) Keresse meg a potenciálfüggvény lokális minimumait.
- (c) Adja meg a potenciálfüggvény minimumai körüli kicsiny rezgések rezgési frekvenciáit.
- (d) Rajzolja fel a hely és impulzus által meghatározott $\{x, p_x\}$ síkra az adott E energiájú mozgások által meghatározott trajektóriákat!
- (e) Színessel, vagy vastag vonallal emeljen ki a trajektóriák közül egy kötött rezgést leíró trajektóriát!

2. Gyakorló feladatok

Gy1. Tekintszen egy matematikai ingát, melynek kitérése akár nagy is lehet. Az ingatest tömege m , hossza L , a gravitációs gyorsulás nagysága g . Az inga helyzetét a stabilis egyensúlyi helyzetétől mért φ szögkitéréssel mérjük, a gravitációs helyzeti energia 0-szintjét pedig úgy vettük fel, hogy az egyensúlyi helyzetben éppen zérus legyen. Az ingát köté helyett egy könnyű, de merev rúd segítségével készítettük el, így mozgása során nem kell attól tartanunk, hogy a köté meglazul.

- (a) Írja fel az inga $V(\varphi)$ helyzeti energiáját a kitérés függvényében!
- (b) Írja fel az inga $\varphi(t)$ -re vonatkozó mozgásegyenletét!
- (c) Adja meg az inga teljes (mozgási + helyzeti) energiájának kifejezését, mint φ és $\dot{\varphi}$ függvényét!
- (d) Mekkora E_0 minimális energia szükséges ahhoz, hogy az inga átforduljon a felső holtpontján?
- (e) Vázolja a $\{\varphi, \dot{\varphi}\}$ síkon az inga különböző E energiákhoz tartozó mozgásai által meghatározott trajektóriákat. Hogyan néznek ki ezek $E < E_0$ és $E > E_0$ esetén?
- (f) Most tekintse az $E < E_0$ esetet, azaz amikor nem fordul át az inga. Írja fel a kialakuló rezgés (lengés) periódusidejét meghatározó integrált!
- (g) Az alábbi ún. elsőfajú elliptikus integrál kifejezését számítógéppel meghatároztuk tetszőleges $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$ esetén:

$$I(\varphi_0) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)}}$$

Alakítsa át úgy a periódusidőt meghatározó integrált úgy, hogy ez az integrál jelenjen meg benne, ahol esetünkben φ_0 az inga maximális kitérését jelöli.

Gy2. **Beadható.** Dimenzióanalízis. Tegyük fel, hogy egy m tömegű részecske a következő potenciálban mozog:

$$V(x) = \alpha|x|^\kappa, \quad (1)$$

ahol $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}$ és $\alpha\kappa > 0$. Határozzuk meg a rendszer periódusidejét, pontosabban annak amplitúdófüggését két különféle módszerrel! Feltehetjük, hogy

$$T \sim A^\beta, \quad (2)$$

ahol $\beta \in \mathbb{R}$ valamilyen egyszerű függvénye κ -nak. Célunk a kitevő meghatározása.

- (a) Az első módszer a dimenzióanalízis. Vegyünk fel SI mértékegységeket, és határozzuk meg külön-külön x , V , α dimenzióit. Ennek segítségével mutassuk meg, hogy az α és A változókból csak egyféleképp lehet olyan hatványkifejezést konstruálni, melynek végeredménye idő dimenziójú. Milyen β hatványkitevő jön így ki?
- (b) Ugyanezt az eredményt számoljuk ki a „standard” módon, a periódusidő integráljának dimenziótlanításával is!

Ezután pedig vizsgáljuk meg a következő speciális eseteket:

- (a) $\kappa = 2$, rugómozgás.
- (b) $\kappa = -1$. Ez mit ír le? A periódusidő amplitúdófüggése egy híres törvény speciális esete. Melyikről van szó?