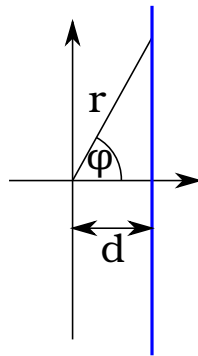


1. Tekintsünk egy pontszerű testet, ami egy  $R$  sugarú körpálya mentén mozoghat. Szeretnénk a feladathoz leginkább illeszkedő koordinátarendszerben számolni, ezért síkbeli polárkoordinátákat használunk úgy, hogy az origót a körpálya középpontjába helyezzük. A test helyzetét ezután az  $r(t)$  és  $\varphi(t)$  függvények segítségével írjuk le.

- Lássuk be, hogy a választott koordinátarendszerben  $r(t) = \text{const.}$  !
- Írjuk fel a tömegpont  $\vec{r}(t)$  helyvektorát az  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  függvények segítségével, a (polár)koordináta-vonalak irányába mutató  $\vec{e}_r$  és  $\vec{e}_\varphi$  egységvektorok bázisában felírva.
- Határozzuk meg a tömegpont  $\dot{\vec{r}}(t)$  sebességvektorát az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban kifejtve! Vigyázzunk, a bázisvektorok helyről helyre változnak, ezért meg kell határoznunk az  $\dot{\vec{e}}_r$  és  $\dot{\vec{e}}_\varphi$  vektorokat is!
- Határozzuk meg a tömegpont  $\ddot{\vec{r}}(t)$  gyorsulásvektorát is az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban kifejtve!

2. Egy tömegpont egyenletes  $v_0$  sebességű, egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az origótól  $d$  távolságra elhaladó egyenes mentén. A mozgást síkbeli polárkoordinátarendszerrel írjuk le, melynek  $\varphi = 0$  irányát úgy választottuk meg, hogy az egyenes pálya origóhoz legközelebbi pontja ebbe az irányba essen. A tömegpont a  $t = 0$  időpontban éppen ezen legközelebbi pontban tartózkodik.



- Írja fel az egyenes pálya  $r(\varphi)$  polárkoordinátás egyenletét!
- Feltéve, hogy ismeri a  $\varphi(t)$  függvényt, írja fel a segítségével (a pályaequációt is kihasználva) a tömegpont  $\dot{\vec{r}}(t)$  sebességvektorát az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban!
- Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó  $v_0$  nagyságú, adja meg a tényleges  $\varphi(t)$  függvényt!
- Az előző alfeladatban meghatározott  $\varphi(t)$  függvény segítségével adja meg a tömegpont  $\dot{\vec{r}}(t)$  sebességvektorát és  $\ddot{\vec{r}}(t)$  gyorsulásvektorát az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban!
- Számolja ki a sebesség nagyságát  $t$  időpontban!
- Számolja ki a teljes gyorsulást és mutassa meg, hogy az nulla!

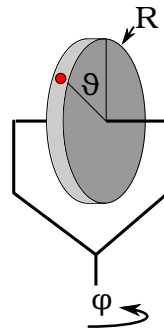
3. Háromdimenziós mozgások vizsgálata során gyakran hasznos az  $\{r, \vartheta, \varphi\}$  ún. gömbi koordinátarendszer használata. A vektormennyiségeket ekkor a síkbeli polárkoordinátarendszerhez hasonlóan a koordinátavonalakat (lokálisan) érintő  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  egységvektorok bázisán érdemes kifejtetni.

- Adjuk meg az  $(r, \vartheta, \varphi)$  koordinátájú ponthoz tartozó  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  lokális bázisvektorokat a derékszögű Descartes koordinátarendszer  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  bázisvektorain kifejtve!

- (b) Tegyük fel, hogy egy tömegpont mozgása során éppen áthalad az  $(r, \vartheta, \varphi)$  koordinátájú ponton. Ebben a pillanatban ismertek a  $\dot{r}$ ,  $\dot{\vartheta}$  és  $\dot{\varphi}$  időderiváltak. Ezek ismeretében adjuk meg a lokális bázisvektorok  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  időderiváltjait, az  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  Descartes-bázisban kifejtve.
- (c) Adjuk meg az előző alfeladatban kapott  $\{\dot{\vec{e}}_r, \dot{\vec{e}}_\vartheta, \dot{\vec{e}}_\varphi\}$  időderiváltakat a lokális  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban kifejtve is!
- (d) Az előző alfeladatok eredményeinek segítségével adjuk meg egy tömegpont  $\{r(t), \vartheta(t), \varphi(t)\}$  gömbi koordinátákkal megadott mozgása esetén tömegpont  $\vec{r}(t)$  hely-,  $\dot{\vec{r}}(t)$  sebesség- és  $\ddot{\vec{r}}(t)$  gyorsulásvektorát az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban kifejtve!

4. Egy  $R$  sugarú lendkerék az ábrán látható módon ún. kardán-felfüggesztéssel van ellátva. A lendkerék elfordulását a  $\vartheta$  szöggel, a kardántengely elfordulását pedig a  $\varphi$  szöggel mérjük. A lendkerék kerületén egy kicsiny pontszerű testet (pl. csavart) rögzítettünk, ennek mozgását vizsgáljuk. A rendszert úgy mozgatjuk, hogy a kardántengely  $\dot{\varphi}$  és a lendkerék  $\dot{\vartheta}$  forgási sebessége egyaránt konstans, azaz a tömegpont mozgása:

$$r(t) = R, \quad \varphi(t) = \Omega t, \quad \vartheta(t) = \omega t$$



- (a) Adjuk meg a tömegpont sebességvektorát az idő függvényében, az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban!
- (b) Adjuk meg a tömegpont sebességének nagyságát az idő függvényében!
- (c) Mekkora a tömegpont maximális sebessége? Hol helyezkedik-el a pályáján, amikor a sebesség maximális?
- (d) Adjuk meg a tömegpont gyorsulásvektorát az idő függvényében, az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban!

5. Egy pontszerű test a síkon a következő síkbeli polárkoordinátákkal megadott pályán mozog,

$$r(\varphi) = k \varphi,$$

ahol  $k$  egy konstans. Először tekintsünk egy olyan mozgást, amikor a tömegpont szögsebessége időben állandó,  $\dot{\varphi}(t) = \omega_0$ . A test a  $t = 0$  időpillanatban az origóból indul.

- (a) Rajzoljuk fel a tömegpont pályáját!
- (b) Feltéve, hogy ismerjük az  $r(t)$  és  $\varphi(t)$  függvényeket, segítségével írjuk fel a tömegpont  $\vec{r}(t)$  helyvektorának és  $\dot{\vec{r}}(t)$  sebességvektorának általános alakját az  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$  bázisban kifejtve!
- (c) A pályaeqyenletet kihasználva, valamint  $\omega_0$  ismeretében fejezzük ki a tömegpont sebességének  $|\dot{\vec{r}}(t)|$  nagyságát!

- (d) Adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az idő függvényében!
  - (e) Adjuk meg a tömegpont gyorsulásvektorának sebességre merőleges komponensét az idő függvényében! Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát abban a pontjában, ahol a test a  $t$ -vel jelölt időpillanatban van.
  - (f) Az előző részfeladatot általánosítva, fejezzük ki általánosan egy tömegpont pályájának görbületi sugarát a  $\vec{r}$  sebesség- és  $\vec{r}$  gyorsulásvektor függvényében!
  - (g) Láthatóan az előbb vizsgált mozgás során a tömegpont sebessége időben növekszik. Most tekintsen egy tömegpontot, ami ugyanezen a pályán mozog, de sebességének nagysága  $v_0 = \text{const.}$ . Adjuk meg ekkor a mozgást leíró  $r(t)$  és  $\varphi(t)$  függvényeket!
- 

6. Háromdimenziós mozgások leírásakor a Descartes és gömbi koordinátarendszerek mellett a harmadik gyakran használt koordinátarendszer az ún. hengerkoordinátarendszer,  $\{\rho, \varphi, z\}$ . Vizsgáljuk egy tömegpont mozgását ebben a koordinátarendszerben! Mozogjon a tömegpont egy kúppalástra feltekert spirális pályán,

$$\rho(t) = A t, \quad \varphi(t) = B t, \quad z(t) = C t$$

- (a) Vázoljuk a részecske pályáját!
- (b) A korábbi feladatokhoz hasonlóan adjuk meg a tömegpont sebesség- és gyorsulásvektorát az  $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$  bázisban!
- (c) Határozzuk meg a pálya görbületi sugarát azon pontjában, ahol a  $t$  időpillanatban halad át!