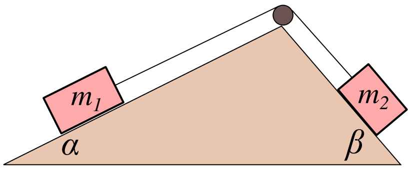
1. Tekintse az ábrán látható elrendezést!



   (a) Soroljuk fel az elrendezésben megjelenő kényszereket!

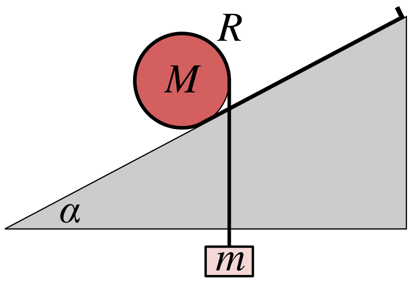
   (b) Virtuális munka elvének segítségével határozzuk meg, milyen kapcsolatnak kell fennállnia α, β, m_1 és m_2 között, ha azt szeretnénk, hogy a rendszer egyensúlyban legyen?

   (c) Fogalmazzuk a rendszer mozgásegyenletét D'Alembert elv segítségével!

   (d) A kötél nyújthatatlan. Ezt a kényszert Lagrange-multiplkikátorral figyelembe véve írjuk fel a rendszer Lagrange-féle elsőfajú egyenleteit, és oldjuk meg!

---

2. Tekintse az ábrán látható elrendezést! Az M tömegű R sugarú hengerre felcsévélt kötelet a lejtő tetejéhez szögeltük, a kötél a hengeren nem csúszik meg.



   (a) Soroljuk fel az elrendezésben megjelenő kényszereket!

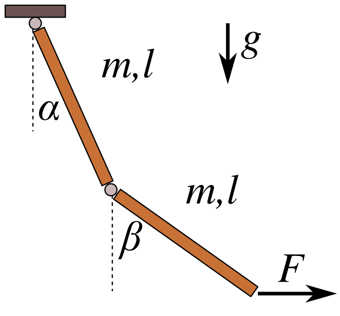
   (b) Virtuális munka elvének segítségével határozzuk meg, milyen kapcsolatnak kell fennállnia α, M, R és m között, ha azt szeretnénk, hogy a rendszer egyensúlyban legyen?

   (c) Fogalmazzuk a rendszer mozgásegyenletét D'Alembert elv segítségével!

   (d) A kötél nyújthatatlan és nem csúszik meg a hengeren. Ezeket a kényszereket Lagrange-multiplkikátorokkal figyelembe véve írjuk fel a rendszer Lagrange-féle elsőfajú egyenleteit, és oldjuk meg!

---

3. Tekintsük az ábrán látható elrendezést, ahol két egyforma rúdból ún. kettős ingát készítettünk. Az alsó ingaszár végét F nagyságú vízszintes erővel húzzuk. Virtuális munka elvének segítségével határozzuk meg az ingaszárak α_0 és β_0 egyensúlyi helyzetét! Ehhez:

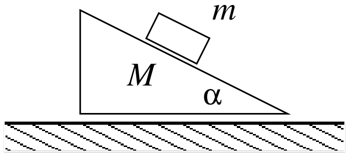


(a) Tetszőleges $\{\alpha, \beta\}$ helyzetben számítsuk ki az alsó ingaszár végpontjának elmozdulását, ha virtuálisan elmozdítjuk a rendszert $\delta\alpha$ ill. $\delta\beta$ variációkkal?

(b) Adjuk meg a virtuális munkákat tetszőleges $\delta\alpha$ ill. $\delta\beta$ virtuális elmozdulások esetén!

(c) A virtuális munka elvének értelmében egyensúlyban tetszőleges virtuális elmozdulásra a virtuális munka zérus. Ezt kihasználva adjuk meg az α_0 és β_0 egyensúlyi helyzetet!

4. Egy R sugarú súrlódásmentes félkör alakú henger tetejéről egy m tömegű kicsiny test csúszik le. A pálya tetőpontján a kezdősebessége elhanyagolhatóan kicsiny. A fő célunk annak meghatározása, hogy hol válik el a kicsiny test a hengertől, és kezd szabadon repülni.



(a) Először tegyük fel, hogy a test a henger felszínén mozoghat csak. Válasszunk kényelmes koordinátarendszert, és írjuk fel ebben ezt a kényszert, $f(x, y) = 0$ alakra rendezve!

(b) A kényszerfeltétel figyelembevételével írjuk fel a test Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletét!

(c) Az (a) feladatban megadott kényszeregyenletet idő szerinti kétszeri deriválásának segítségével fejezzük ki a λ Lagrange-multiplikátort, mint $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$ függvényét!

(d) Írjuk fel az energiamegmaradást a problémára, és mutassuk meg, hogy a λ Lagrange-multiplikátor nem jelenik meg ebben az egyenletben!

(e) Az energiamegmaradási egyenletet felhasználva fejezzük a (c) feladat kifejezését alakítsuk úgy, hogy λ az E energiától, valamint az y magasságtól függjön már csak.

(f) A kezdeti feltételből leolvashatjuk az E energiát. Vizsgáljuk λ előjelét, és adjuk meg, hol válik le a test a hengerről.