5. ANYAG

Az asztal közepén van egy függőleges tengely, e körül súrlódásmentesen el tud fordulni egy L hosszú kötél. A kötél végéhez egy m tömegű kiskocsit rögzítettünk. Ezen van egy szódáspatron, amit a $t = 0$ időpontban kilyukasztunk, ennek következtében a kiskocsi t_0 másodpercen keresztül F nagyságú erő hatására gyorsul érintő irányban.
A kiskocsi és az asztal közötti súrlódási együttható μ. $g = 10\ m/s^2$.
L, m, t_0, F és μ random generált értékek voltak.

MO.

A kiskocsira ható erők: nehézségi erő, az asztal által kifejtett nyomóerő, kötélerő, súrlódási erő, és az első t_0 másodpercben a patronból kiáramló gáz által kifejtett erő is:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_k} + \mathbf{F} + \mathbf{F_s}$

függőleges: $\mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} = \mathbf{0} \rightarrow F_{ny} = mg \rightarrow F_s = \mu mg$

sugár irányú: $ma_{cp} = F_k$

érintő irányú: $ma_t = F - F_s = F - \mu mg \rightarrow a_t = F/m - \mu g$

ill. amikor a patron már nem fejt ki erőt:

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_k} + \mathbf{F_s}$

érintő irányú: $ma_t = - F_s = - \mu mg \rightarrow a_t = - \mu g$

a) 5 pont

VEGYÉSZMÉRNÖK:

Mikor áll meg a kiskocsi?

MO.

Az első szakaszban $v = v_0 + a_t \cdot t$, ahol $v_0 = 0$ és $a_t = F/m–\mu g \rightarrow v_{max} = (F/m–\mu g) \cdot t_0$;
a második szakaszban $v = v_0 + a_t \cdot t_1$ (t_1 a lassulás ideje), ahol $v_0 = v_{max}$ és $a_t = - \mu g$
$\rightarrow v = (F/m–\mu g) \cdot t_0 - \mu g\, t_1 \rightarrow v = 0$ ha $t_1 = \ldots$
$t = 0$ -tól számítva az időt $t_0 + t_1 = F/(\mu mg) \cdot t_0$ [s] alatt áll meg.

BIOMÉRNÖK:

Hány fordulatot tesz meg a kiskocsi a kötél végén, amíg eléri a maximális sebességét?

MO.

t_0 ideig gyorsult a kiskocsi.
Szögváltozóval számítva:
$a_t = F/m–\mu g \rightarrow \beta = a_t / r = (F/m–\mu g) / r$; $\omega_0 = 0$
a szögelfordulás a t_0 idő alatt: $\varphi = ½\, \beta\, t_0^2 = ½\, (F/m–\mu g)/r \cdot t_0^2$ [rad];
egy fordulat 2π rad, tehát $\varphi / (2\pi)$ fordulatot tesz meg.
Vagy $s = ½\, a_t\, t_0^2 = ½\, (F/m–\mu g) \cdot t_0^2$, ezt a kör kerületével osztva kapjuk meg, hogy hány fordulatot tesz meg: $s / (2r\pi)$ fordulat.

b) 1 pont

VEGYÉSZMÉRNÖK:

Mekkora a kiskocsi szögsebessége t = … s-ban? (a megadott idő még a gyorsuló szakaszban volt)

BIOMÉRNÖK:

Mekkora a kiskocsi maximális szögsebessége?

MO.

$a_t = F/m - \mu g$
$\rightarrow \beta = a_t / r = (F/m–\mu g)/r \rightarrow \omega = \beta\, t = (F/m–\mu g)/r \cdot t$
vagy
$\rightarrow v = a_t \cdot t = (F/m–\mu g) \cdot t \rightarrow \omega = v / r = (F/m–\mu g)/r \cdot t$
A maximális szögsebességnél $t = t_0$.

c) 3 pont
VÉLETLENSZERŰEN FELDOBOTT KÉRDÉS:

Mekkora a kötélerő t = … s-ban? (a megadott idő még a gyorsuló szakaszban volt)
Mekkora erőt kell kibírnia a kötélnek, hogy a maximális terhelésnél se szakadjon el?
MO.
$F_k = m\, a_{cp} = m\, v^2 / r$, ahol $v = (F/m-\mu g) \cdot t$
A kötelet a maximális terhelés a maximális sebességnél, azaz $t = t_0$ -ban éri.

Mekkora a kiskocsi gyorsulása a t = … s-ban? (a megadott idő még a gyorsuló szakaszban volt)
Mekkora a kiskocsi maximális gyorsulása?
MO.
Az érintő irányú gyorsulás $a_t = F/m - \mu g$,
a sugár irányú gyorsulás $a_{cp} = v^2 / r = [(F/m-\mu g)\cdot t]^2 / r$;
a kiskocsi gyorsulása ezekből számolható Püthagorasz-tétellel.
A maximális gyorsulás számítása a t_0 időre vonatkozik. Mivel ebben a pillanatban szűnik meg a patron által kifejtett erő, az is elfogadható, ha $a_t = -\mu g$ -vel van számolva.

Mekkora szöget zár be (fokban) a kiskocsi gyorsulásvektora a kötéllel a t = … s-ban? (a megadott idő még a gyorsuló szakaszban volt)
Mekkora szöget zár be (fokban) a kiskocsi gyorsulásvektora a kötéllel, amikor maximális a sebessége?
MO.
Az érintő irányú gyorsulás $a_t = F/m - \mu g$,
a sugár irányú gyorsulás $a_{cp} = v^2 / r = [(F/m-\mu g)\cdot t]^2 / r$;
a gyorsulás kötéllel bezárt α szögére $\mathrm{tg}\alpha = a_t / a_{cp} = \ldots$
A maximális sebességnél történő számítás a t_0 időre vonatkozik. Mivel ebben a pillanatban szűnik meg a patron által kifejtett erő, az is elfogadható, ha $a_t = -\mu g$ -vel van számolva.

---

6. ANYAG
6/1. 4 pont
Vízszintes, súrlódásmentes síkon k rugóállandójú rugó egyik végét rögzítjük, másik végéhez rögzítünk egy m tömegű testet. A rezgőmozgást úgy indítjuk el, hogy a rugót összenyomjuk x_0 -t, majd ebből a helyzetből elengedjük.
k, m, x_0, t és n random generált értékek voltak.

MO. $\omega = \sqrt{k/m}$
A és φ_0 meghatározása:
t = 0 -ban $x(0) = -x_0$ és $v(0) = 0$, azaz $A\cos(\varphi_0) = -x_0$ és $-A\omega\sin(\varphi_0) = 0$
$\rightarrow \sin(\varphi_0) = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$ vagy $\pm\pi$ lehet,
$\varphi_0 = 0$ esetén $x(0) = A\cos(\varphi_0) > 0$ lenne, vagyis a maximális megnyúlással indulna, ez nem jó;
tehát $\varphi_0 = \pm\pi$, így $x(t) = A\cos(\omega t+\pi)$ vagy $x(t) = A\cos(\omega t-\pi)$,
ami felírható egyszerűbben is $x(t) = -A\cos(\omega t)$ alakban; $A = x_0$.

VÉLETLENSZERŰEN FELDOBOTT KÉRDÉS:

Mekkora lesz a rugó megnyúlása t s múlva? (A megnyúlt állapot előjele pozitív.)
MO.
ld. feljebb: $x(t) = -x_0 \cos(\sqrt{k/m} \cdot t) = \ldots$

Mekkora lesz a test sebessége t s múlva? (A megnyúlás irányába mutató sebesség pozitív.)
MO.
x(t)-t ld. feljebb:
$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{k/m} \cdot t+\pi) \quad \rightarrow \quad v(t) = -A\omega \sin(\omega t+\pi) = -x_0\sqrt{k/m} \sin(\sqrt{k/m} \cdot t+\pi) = \ldots$
vagy $x(t) = -x_0 \cos(\sqrt{k/m} \cdot t) \quad \rightarrow \quad v(t) = A\omega \sin(\omega t) = x_0\sqrt{k/m} \sin(\sqrt{k/m} \cdot t) = \ldots$

Mekkora kezdősebességet kellene adni a testnek, hogy a rezgőmozgás amplitúdója n-szerese legyen annak, ami kezdősebesség nélkül jön létre, ha a kezdősebesség a rugó további összenyomódásának irányába mutat?
Mekkora kezdősebességet kellene adni a testnek, hogy a rezgőmozgás amplitúdója n-szerese legyen annak, ami kezdősebesség nélkül jön létre, ha a kezdősebesség a rugó nyugalmi állapota felé mutat?
MO.
Kezdősebesség nélkül $A = x_0$, v_0 kezdősebességgel $A = n \cdot x_0$.
A kezdősebesség iránya nem lényeges, bármelyik irányba indítva a testet ugyanakkora lesz az amplitúdó. Leggyorsabb megoldásként alkalmazhatjuk az
$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ képletet, ahol $A = n \cdot x_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = x_0 \cdot \sqrt{(k/m) \cdot (n^2 - 1)}$
A vegyészmérnök zh-ból kimaradt az a mondat, amiben meg volt adva x_0, ezért nem lehetett kiszámolni az eredményt. Ezúton is elnézést kérek emiatt! A pontozás a papíron található megoldás alapján történik.

6/2.
Fellógattunk egy állványra egy l_0 hosszú k rugóállandójú rugót, a végéhez rögzítettünk egy m tömegű testet, majd a testet L m-rel a rugó felfüggesztési pontja alatt elengedtük.
l_0 k, m és L random generált értékek voltak.

a) 4 pont
Mekkora az így létrejövő rezgőmozgás amplitúdója?
Az egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása $x_{es} = mg/k$, a rugó hossza $l_{es} = l_0 + mg/k$.
Az amplitúdó l_{es} és L különbsége (mivel $v_0 = 0$):
$L > l_{es}$ esetén $A = L - l_{es} = L - (l_0 + mg/k)$,
$L < l_{es}$ esetén $A = l_{es} - L = (l_0 + mg/k) - L$.

b) 2 pont

VÉLETLENSZERŰEN FELDOBOTT KÉRDÉS:

Mekkora a testre a rugó által kifejtett erő nagysága a rezgőmozgás legfelső pontjában?

Mekkora a testre a rugó által kifejtett erő nagysága a rezgőmozgás legalsó pontjában?

$L < l_{es}$ esetén

a <u>legfelső</u> pontban a rugó hossza L (éppen abból a pontból indítottuk el)

$\rightarrow$ a megnyúlás nagysága $\Delta l = l_0 - L$

(a megadott L értékek nem csak l_{es}-nél, hanem l_0-nál is kisebbek voltak)

$\rightarrow$ $F_r = (l_0 - L) \cdot k$.

a <u>legalsó</u> pontban a rugó hossza $l_{es} + A = l_{es} + (l_{es} - L) = 2l_{es} - L = 2mg/k + 2l_0 - L$

$\rightarrow$ a megnyúlás nagysága $\Delta l = (2mg/k + 2l_0 - L) - l_0 = 2mg/k + l_0 - L$

$\rightarrow$ $F_r = (2mg/k + l_0 - L) \cdot k = 2mg + (l_0 - L) \cdot k$.

$L > l_{es}$ esetén

a <u>legalsó</u> pontban a rugó hossza L (éppen abból a pontból indítottuk el)

$\rightarrow$ a megnyúlása $\Delta l = L - l_0$

$\rightarrow$ $F_r = (L - l_0) \cdot k$.

a <u>legfelső</u> pontban a rugó hossza $l_{es} - A = l_{es} - (L - l_{es}) = 2l_{es} - L = 2mg/k + 2l_0 - L$

$\rightarrow$ a megnyúlása $\Delta l = (2mg/k + 2l_0 - L) - l_0 = 2mg/k + l_0 - L$

$\rightarrow$ $F_r = (2mg/k + l_0 - L) \cdot k = 2mg + (l_0 - L) \cdot k$.

---

7. ANYAG

6 pont

Egy bolygó sugara R, a nehézségi gyorsulás értéke a bolygó felszínén g.

Mekkora függőleges kezdősebességgel kell fellőni egy testet a bolygó felszínéről, hogy az eljusson a felszíntől számítva a bolygó sugarának n-szeresére?

A bolygónak nincs légköre, a közegellenállás elhanyagolható.

R, g és n random generált értékek voltak.

MO.

Munkatétellel vagy energia-megmaradással számolható. Pl. Energia-megmaradással:

$$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = -\gamma \frac{m \cdot M}{r} + ½\, mv^2 = \text{konst.}$$

Az összetartozó hely és sebesség értékek:

a test v_0 sebességgel indul a bolygó felszínéről, ahol $r = R$, és

addig emelkedik, amíg $v = 0$ lesz, ott $r = R + n \cdot R = R\,(n+1)$.

Ezeket beírva

$$-\gamma \frac{m \cdot M}{R} + \frac{1}{2} m{v_0}^2 = -\gamma \frac{m \cdot M}{(n+1) \cdot R} + 0 \quad \rightarrow \quad -\gamma \frac{M}{R} + \frac{1}{2}{v_0}^2 = -\gamma \frac{M}{(n+1) \cdot R}$$

A feladatban nincs megadva se γ értéke, se a bolygó tömege, viszont meg van adva a g értéke, ami

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \quad \rightarrow \quad \gamma M = g \cdot R^2 \text{ , ezzel}$$

$$-\frac{gR^2}{R} + \frac{1}{2}{v_0}^2 = -\frac{gR^2}{(n+1) \cdot R} \quad \rightarrow \quad {v_0}^2 = 2gR \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2gR \cdot \frac{n}{n+1} \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{...}$$