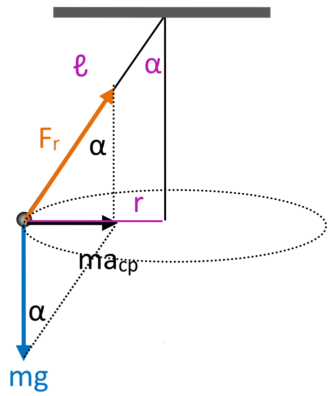
Képzeljünk el egy olyan körhintát, aminek a kötelei kissé rugalmasak, rugóként viselkednek, a hosszváltozásuk a Hooke-törvénnyel írható le. A kötél „rugóállandója” 400 N/m.
A körhinta 5 m magas póznájának tetejére rögzített 4 m hosszú rugalmas kötél végére egy 50 kg-os gyerek ül (az ülés tömegét elhanyagolhatjuk).
A körhintát elkezdik növekvő szögsebességgel forgatni. Írja fel és ábrázolja, hogyan függ a kötélnek a függőlegessel bezárt szögétől
a) a kötél hossza;
b) a körmozgás periódusideje!

Megoldás:



A feladat hasonló az **5/9.** feladathoz, de figyelembe kell venni, hogy a kötél nyúlik, ezért itt most nem $\mathbf{F_k}$-val, hanem $\mathbf{F_r}$-rel jelöljük.
A testre a nehézségi erő és a rugóerő hat:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_r}$$

a) A függőleges (körpályára merőleges) komponensek eredője zérus:

$$ma_\perp = F_r \cos\alpha - mg = 0 \qquad \rightarrow \qquad F_r = mg/\cos\alpha,$$

és tudjuk, hogy a rugóerő nagysága

$$F_r = k\,(\ell - \ell_0),$$

tehát

$$mg/\cos\alpha = k\,(\ell - \ell_0),$$

amiből a kötél hossza

$$\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha},$$

behelyettesítve

$$\ell(\alpha) = 4 + 50\cdot 10/(400\cdot\cos\alpha) = 4 + 1{,}25/\cos\alpha$$

b) A sugár irányú komponens

$$m\,a_{cp} = F_r \sin\alpha = (mg/\cos\alpha)\cdot\sin\alpha = mg\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$a_{cp} = r\,\omega^2 = r\,(2\pi/T)^2.$$

A körpálya sugara

$$r = \ell \sin\alpha,$$

a kötél hosszát beírva

$$r = \left(\ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha}\right)\sin\alpha.$$

Ezeket beírva az $ma_{cp} = (mg/\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$ egyenletbe:

$$\cancel{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha}\right)\cancel{\sin\alpha}\cdot\omega^2 = (\cancel{m}g/\cos\alpha)\cdot\cancel{\sin\alpha}$$

$$\frac{\ell_0 k\cos\alpha + mg}{k\,\cancel{\cos\alpha}}\cdot\omega^2 = \frac{g}{\cancel{\cos\alpha}} \qquad \rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{gk}{\ell_0 k\cos\alpha + mg} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0 k\cos\alpha + mg}{gk}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_0\cos\alpha}{g} + \frac{m}{k}}\,.$$

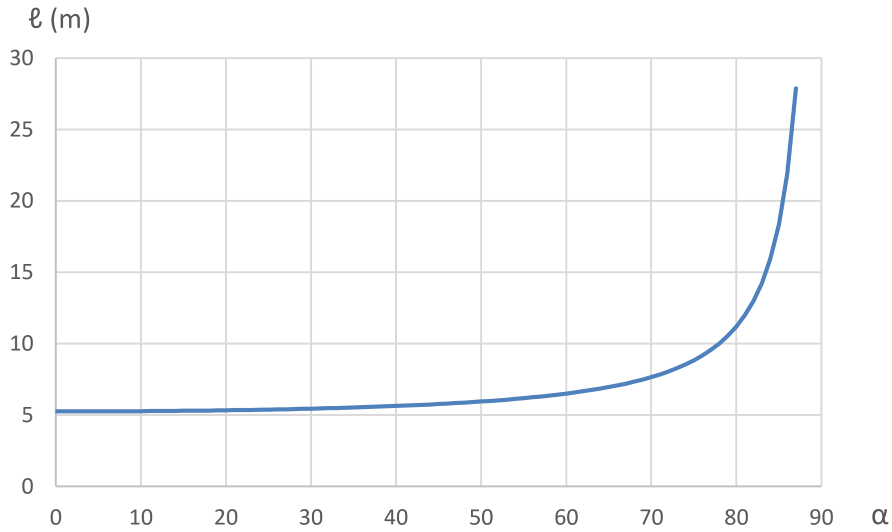
Az értékeket behelyettesítve

$$T(\alpha) = 2\pi\sqrt{\frac{4\cos\alpha}{10} + \frac{50}{400}} = 2\pi\sqrt{0{,}4\cos\alpha + 0{,}125}\,.$$

Ábrázolás:

a) $\ell(0) = 4+1,25/1 = 5,25$ m

Ahogy α nő (vagyis ahogy a kötél vízszinteshez közelít), a kötél hossza végtelenhez tart:



b) $T(0) = 2\pi\sqrt{0{,}4\cdot 1 + 0{,}125} = 4{,}553$ s

A periódusidő α növelésével csökken,

$T(90°) = 2\pi\sqrt{0 + 0{,}125} = 2{,}2214$ s.

Egy rugalmatlan kötéllel a periódusidő zérushoz tartana