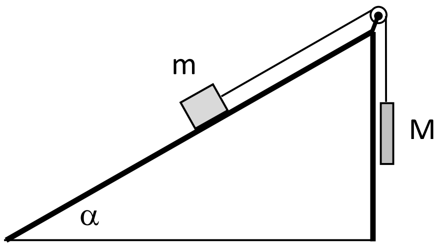
Egy m = 8 kg tömegű testet és egy M = 5 kg tömegű testet nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű kötéllel összekötünk és az ábrán látható módon elhelyezünk, az m tömegű testet kezdősebesség nélkül a lejtő feléhez téve. A lejtő tetején levő csiga ideális.



Az m tömegű test és a lejtő közötti tapadási súrlódási együttható értéke 0,25.

a) A lejtő α hajlásszögét fokozatosan emeljük. Milyen α szögek esetén tapad a lejtőn az m tömegű test?

b) Mekkora hajlásszög esetén lesz a tapadási súrlódási erő értéke éppen 10 N?

Megoldás:

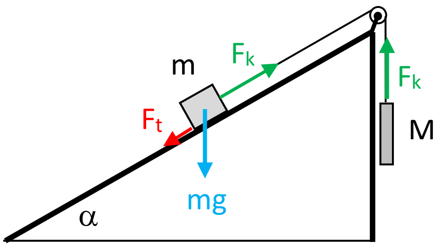
a) A felírt mozgásegyenleteknél azt tételezzük fel, hogy az m test tapad, a testek nem kezdenek gyorsulni, $a = 0$.

A tapadási súrlódási erő iránya attól függ, hogy az adott hajlásszögnél merre kezdenének gyorsulni a testek. Ha

$mg \sin\alpha_0 = Mg$,   azaz $\sin\alpha_0 = M/m = 5/8 = 0{,}625 \rightarrow \alpha_0 = 38{,}68°$,

akkor a tapadási súrlódási erő zérus.

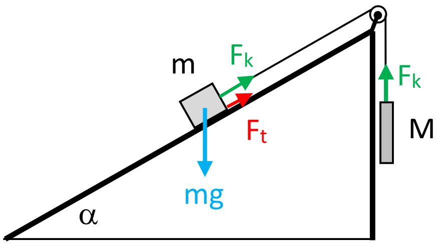
Ennél kisebb szögek esetén a rendszer jobbra gyorsulna, tehát az m-re ható tapadási súrlódási erő lefelé hat:



$ma = F_k - mg \sin\alpha - F_t = 0$ és

$Ma = Mg - F_k = 0$;

α_0-nál nagyobb szögek esetén pedig balra gyorsulna a rendszer, F_t felfelé hat:



$ma = mg \sin\alpha - F_t - F_k = 0$ és

$Ma = F_k - Mg = 0$.

Az M-re felírt egyenletből $F_k = Mg$, ezt behelyettesítve a tapadási súrlódási erő

$F_t = Mg - mg \sin\alpha$,   ha $\alpha < \alpha_0$, ill.

$F_t = mg \sin\alpha - Mg$,   ha $\alpha > \alpha_0$.

A tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_{t,max} = \mu_t F_{ny}$. Mivel m-re a nehézségi erőn kívül nem hat olyan erő, aminek van a lejtőre merőleges komponense, ezért $F_{ny} = mg \cos\alpha$, tehát

$F_t \le \mu_t mg \cos\alpha$.

Ezt felhasználva

$\alpha < \alpha_0$ esetén $Mg - mg \sin\alpha \le \mu_t mg \cos\alpha$, és

$\alpha > \alpha_0$ esetén $mg \sin\alpha - Mg \le \mu_t mg \cos\alpha$,

ebből meghatározható α értéke.

g-vel egyszerűsítve, m-mel osztva és $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ felhasználásával

$\alpha < \alpha_0$ esetén $(M/m) - \sin\alpha \le \mu_t \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, és

$\alpha > \alpha_0$ esetén $\sin\alpha - (M/m) \le \mu_t \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Négyzetre emelés után a két egyenlet megegyezik:

$M^2/m^2 - 2\, M/m \sin\alpha + \sin^2\alpha \le \mu_t^2 - \mu_t^2 \sin^2\alpha$

$(1 + \mu_t^2) \sin^2\alpha - 2\, M/m \sin\alpha + M^2/m^2 - \mu_t^2 \le 0.$

Behelyettesítve

$1{,}0625 \sin^2\alpha - 1{,}25 \sin\alpha + 0{,}328125 \le 0.$

Az egyenlet gyökei

$\sin\alpha_1 = 0{,}3954 \rightarrow \alpha_1 = 23{,}29°$ és

$\sin\alpha_2 = 0{,}7811 \rightarrow \alpha_2 = 51{,}36°$,

tehát a testek akkor nem kezdenek gyorsulni, ha

$23{,}29° \le \alpha \le 51{,}36°$.

b) Két hajlásszögnél is lehet a tapadási súrlódási erő nagysága 10 N.

$\alpha < \alpha_0$ esetén (amikor F_t lefelé mutat):

$F_t = Mg - mg \sin\alpha = 50 - 80 \sin\alpha = 10 \rightarrow \sin\alpha = 0{,}5 \rightarrow \alpha = 30°$, és

$\alpha > \alpha_0$ esetén (amikor F_t felfelé mutat):

$F_t = mg \sin\alpha - Mg = 80 \sin\alpha - 50 = 10 \rightarrow \sin\alpha = 0{,}75 \rightarrow \alpha = 48{,}59°$.