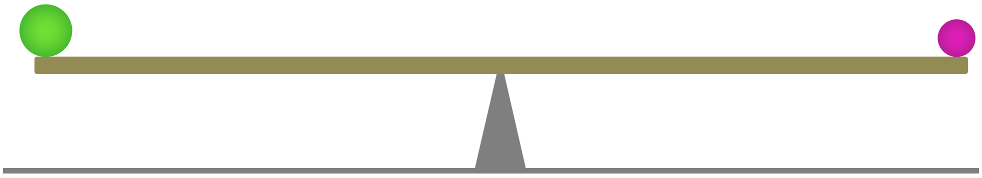
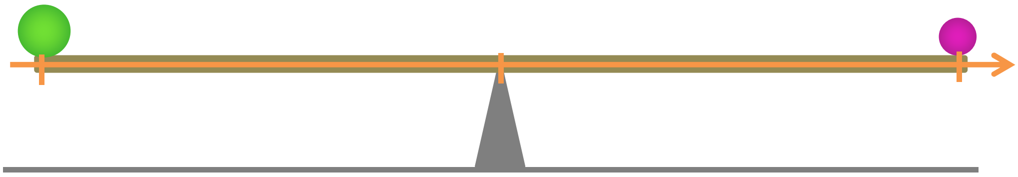
9/+1. Aladár (32 kg) és Bözsi (22 kg) mérleghintázni akarnak. A mérleghinta rúdja 6,4 m hosszú és 10 kg tömegű, a felezőpontja alatt van alátámasztva egy 40 cm magas tartóval.
a) Hol van az Aladár + Bözsi + rúd rendszer tömegközéppontja, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?
b) Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka az alátámasztási pontra vízszintes helyzetben?
c) Mi történik a gyerekekkel, ha nem ér le a lábuk?
d) Hová kell üljön Aladár, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyenek?
e) Ha megoldható lenne, hogy az alátámasztást odébb toljuk, akkor hol kéne alátámasztani a rudat, hogy vízszintes helyzetben egyensúlyban legyen, ha a gyerekek a rúd végén ülnek?

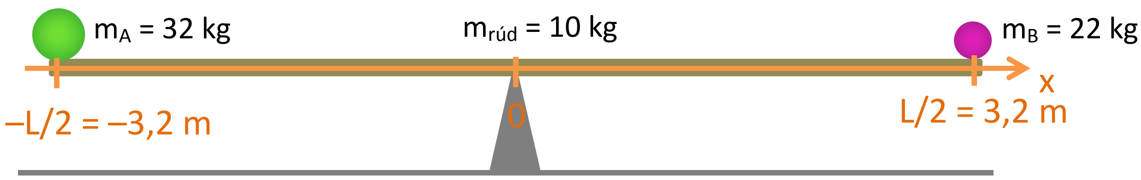


MO.
a) A tömegközéppont kiszámításához vegyünk fel egy x tengelyt a rúd mentén pl. így:



ekkor a tömegközéppont x koordinátája
$X_S = (0{\cdot}32 + 3{,}2{\cdot}10 + 6{,}4{\cdot}22) / (32+10+22) = 2{,}7$ m;

vagy így:

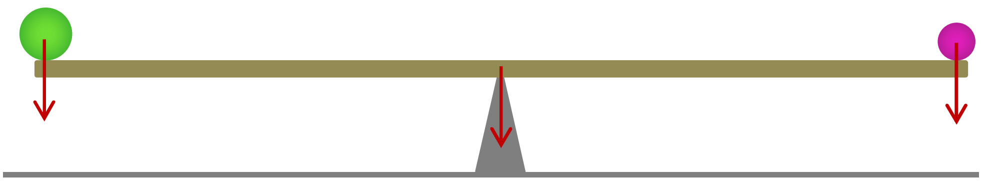


ekkor a tömegközéppont x koordinátája
$X_S = (-3{,}2{\cdot}32 + 0{\cdot}10 + 3{,}2{\cdot}22) / (32+10+22) = -0{,}5$ m.

Tehát a tömegközéppont az alátámasztástól 0,5 m-re van a nehezebb gyerek, Aladár felé.

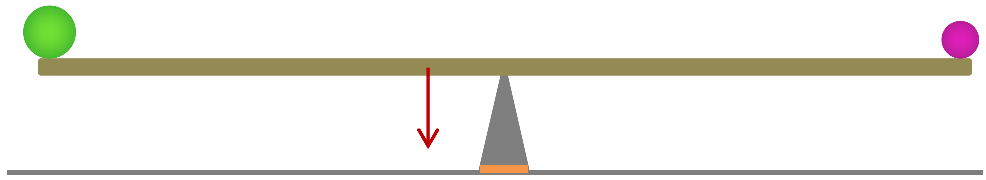
b) A forgatónyomatékot kiszámolhatjuk

- testenként:



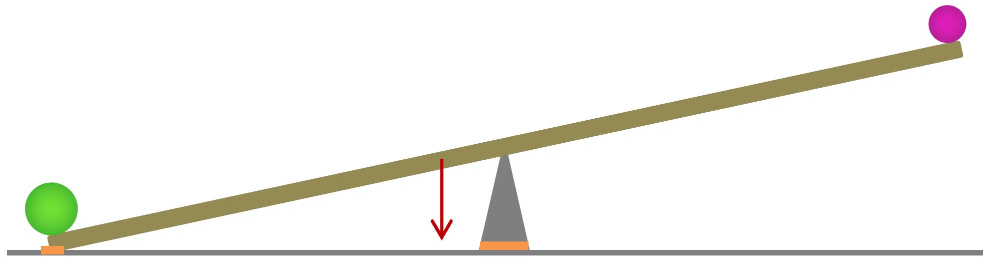
az Aladárra ható nehézségi erő a hintát balra akarja forgatni (pozitív forgásirányba)
$M_A = m_A g \cdot (L/2) = 32{\cdot}10{\cdot}3{,}2 = 1024$ Nm;
a Bözsire ható nehézségi erő a hintát jobbra akarja forgatni (negatív forgásirányba)
$M_B = -m_B g \cdot (L/2) = -22{\cdot}10{\cdot}3{,}2 = -704$ Nm;
a rúdra ható nehézségi erő forgatónyomatéka zérus, mert az erő átmegy az alátámasztási ponton;
tehát a rendszer forgatónyomatéka összesen
$M = M_A + M_B + 0 = 320$ Nm, balra.

➢ a rendszer tömegközéppontjába helyezve az össztömeget:



ekkor az erőkar a tömegközéppont és az alátámasztás távolsága, k_s = 0,5 m:
$M = (m_A+m_B+m_{rúd})\cdot g \cdot k_s = (32+22+10)\cdot 10 \cdot 0,5 = 320$ Nm, balra.

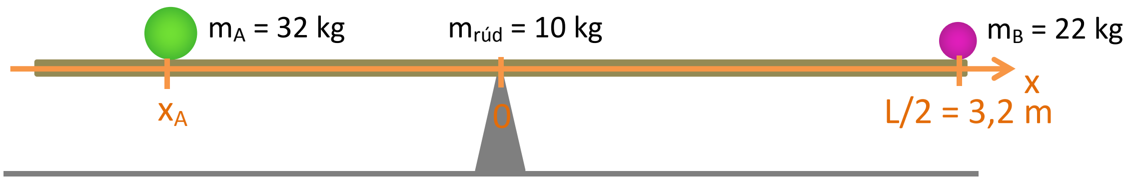
c) Mivel az alátámasztás nem a tömegközéppont alatt van, ezért a hinta vízszintes helyzetben nincs egyensúlyban. A tömegközéppont az alátámasztástól balra van, ezért a hinta elfordul balra:



Ebben a helyzetben a tömegközépponton átmenő nehézségi erő vektora a két alátámasztási pont között van, ezért a mérleghinta így egyensúlyban van.

d) Aladár közelebb kell üljön az alátámasztáshoz, hogy a közös tömegközéppont éppen az alátámasztás fölött legyen, így az eredő forgatónyomaték zérus lesz.

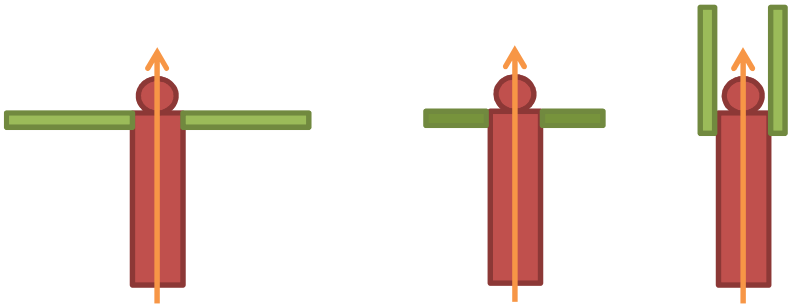
Vegyük fel pl. így az x tengelyt, így $x_s = 0$ kell legyen:



$X_S = (x_A\cdot 32 + 0\cdot 10 + 3,2\cdot 22) / (32+10+22) = 0 \quad \rightarrow \quad x_A = -2,2$ m,
tehát 1 m-rel közelebb kell csússzon a rúd közepe felé.

e) A tömegközéppont alatt, amit a **b)** részben már kiszámoltunk, tehát a rúd közepétől 0,5 m-rel balra.

9/+2. A Mikulás vízszintesen kitárt karral piruettezni kezdett a jégen.
Mennyire változik meg a forgásának a szögsebessége, ha
a) a karjait továbbra is vízszintesen tartva könyökben vízszintesen visszahajtja?
b) a karjait függőlegesbe fordítja (a válla körül, a törzs-hengerének szélénél)?
A Mikulás homogén sűrűségű, a tömege 150 kg.
Törzsét+lábait+nagykabátját tekintsük 16 cm sugarú, 150 cm magas hengernek,
fejét egy ezen levő 12 cm sugarú gömbnek,
karjait a henger tetejénél annak szélétől kiinduló 5 cm sugarú, 60 cm hosszú hengereknek.
A Mikulás könyöke a karja közepénél van.
Kinyújtott vízszintes karral a szögsebessége 12,0 s^{-1}.



MO.
Ha piruettezés közben a Mikulás a karját behajlítja vagy függőlegesbe fordítja, a Mikulás összes impulzusmomentuma nem változik meg, mivel a karok mozgatása belső erő hatására történik, közben a külső erők forgatónyomatéka zérus, tehát $L = \Theta\,\omega = \text{konst.}$
Mivel megváltozik a Mikulás alakja, a karjának félbehajlításával ill. függőlegesbe fordításával azok összességében közelebb kerülnek a forgástengelyhez, ezért a tehetetlenségi nyomatéka lecsökken, és így a szögsebessége megnő.
Először ki kell számolni a tehetetlenségi nyomatékot a kiinduló és a két megváltozott alakra.

A Mikulás térfogata

$V = V_{törzs} + V_{fej} + 2V_{kar} = 0{,}16^2\pi\cdot 1{,}50 + (4/3)\cdot 0{,}12^3\pi + 2\cdot 0{,}05^2\pi\cdot 0{,}60 = 0{,}1206 + 0{,}0072 + 2\cdot 0{,}0047 = 0{,}1373\ m^3$,

a sűrűsége

$\rho = m / V = 150 / 0{,}1373 = 1092{,}5\ kg/m^3$,

az egyes részeinek a tömege:

törzs $m_{törzs} = \rho\cdot V_{törzs} = 131{,}8$ kg,
fej $m_{fej} = \rho\cdot V_{fej} = 7{,}908$ kg,
egy-egy kar $m_{kar} = \rho\cdot V_{kar} = 5{,}148$ kg.

A Mikulás tehetetlenségi nyomatéka a törzsének közepén átmenő forgástengelyre, ha a karja ki van nyújtva:

- a törzse egy henger, ami a szimmetriatengelye körül forog; a henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére
  $\Theta_{henger} = ½mR^2$; $m_{törzs} = 131{,}8$ kg, $R_{törzs} = 16$ cm,
  tehát $\Theta_{törzs} = 0{,}5\cdot 131{,}8\cdot 0{,}16^2 = 1{,}687\ kgm^2$;
- a feje egy gömb, aminek a tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére
  $\Theta_{gömb} = \frac{2}{5}mR^2$, $m_{fej} = 7{,}908$ kg, $R_{fej} = 5$ cm,
  tehát $\Theta_{fej} = 0{,}4\cdot 7{,}908\cdot 0{,}05^2 = 0{,}0455\ kgm^2$;
- egy-egy karja egy-egy hosszú vékony henger, ami a henger szimmetriatengelyére merőleges tengely körül forog, ezért a henger ilyenkor rúdnak tekinthető!
  a forgástengely a végpontjától $R_{törzs} = 16$ cm-re van, erre a tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot Steiner-tétellel számolhatjuk: a rúd felezőpontján átmenő tengelyre $\Theta_s = \frac{1}{12}ML^2$,

az eltolás $d = ½L_{kar} + R_{törzs} = 30+16 = 46$ cm,

tehát $\Theta_{kar} = \frac{1}{12} m_{kar} L_{kar}^2 + m_{kar} d^2 = 5{,}148 \cdot 0{,}6^2/12 + 5{,}148 \cdot 0{,}46^2 = 1{,}244$ kgm^2;

összesen

$\Theta_1 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 2\,\Theta_{kar} = 4{,}220$ kgm^2 kinyújtott vízszintes karral.

a) Ha a karja vissza van hajtva, akkor egy karja két olyan hengernek tekinthető, aminek a tömege $½m_{kar} = 2{,}574$ kg, a hossza $½L_{kar} = 30$ cm, mindkét rész úgy forog, hogy a vége a forgástengelytől 16 cm-re van, a részek tömegközéppontjának a távolsága a forgástengelytől $d' = ½ \cdot (½L_{kar}) + R_{törzs} = 15+16 = 31$ cm, tehát egy fél kar tehetetlenségi nyomatéka

$\Theta_{fél\ kar} = 2{,}574 \cdot 0{,}3^2/12 + 2{,}574 \cdot 0{,}31^2 = 0{,}2475$ kg m^2;

a Mikulás tehetetlenségi nyomatéka összesen

$\Theta_2 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 4\,\Theta_{fél\ kar} = 2{,}722$ kgm^2 félbehajtott vízszintes karral.

Az impulzusmomentum-megmaradást felírva:

$\Theta_1\,\omega_1 = \Theta_2\,\omega_2 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \Theta_1 / \Theta_2 \cdot \omega_1 = 4{,}220/2{,}722 \cdot 12{,}0 = 18{,}6\ s^{-1}$.

b) Ha a karja függőleges, akkor a forgástengely párhuzamos a henger szimmetriatengelyével, így a kar tehetetlenségi nyomatéka a henger tehetetlenségi nyomatékából számolható Steiner-tétellel:

$\Theta_{henger} = ½mR^2$; $m_{kar} = 5{,}148$ kg, $R_{kar} = 5$ cm,

az eltolás $d'' = R_{törzs} + R_{kar} = 21$ cm, tehát egy kar tehetetlenségi nyomatéka

$\Theta_{kar,függ} = 0{,}5 \cdot 5{,}148 \cdot 0{,}05^2 + 5{,}148 \cdot 0{,}21^2 = 0{,}2335$ kgm^2;

összesen

$\Theta_3 = \Theta_{törzs} + \Theta_{fej} + 2\,\Theta_{kar,függ} = 2{,}200$ kgm^2 kinyújtott függőleges karral.

Az impulzusmomentum-megmaradást felírva:

$\Theta_1\,\omega_1 = \Theta_3\,\omega_3 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = \Theta_1 / \Theta_3 \cdot \omega_1 = 4{,}220/2{,}200 \cdot 12{,}0 = 23{,}0\ s^{-1}$.