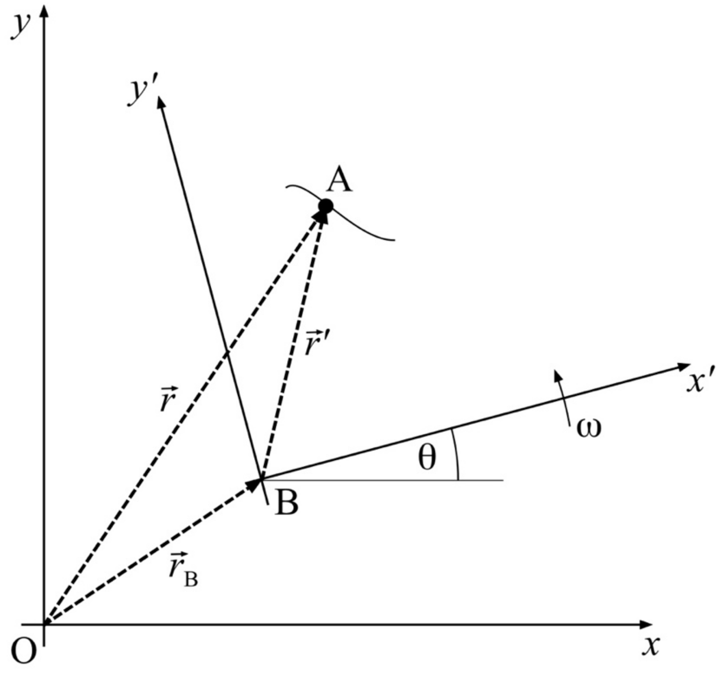
Mozgás leírása nem-inerciarendszerekben. Tehetetlenségi „erők".

Bokor Nándor, BME, 2020.

(x,y): *inerciarendszer*, azaz olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben teljesülnek a Newton-törvények (pl. Newton 2. törvénye: $\vec{F}_e = m\vec{a}$).
(x',y'): *nem-inerciarendszer, más néven "gyorsuló vonatkoztatási rendszer"*. Ez *nem inerciarendszer*, mert:
(1) az origója, B, *transzlációs gyorsulást végez* az (x,y) inerciarendszerhez képest,
(2) az (x',y') koordinátatengelyek *forognak* a B origó körül.

Az alábbiakban minden olyan mennyiséget, amelyet a vesszős vonatkoztatási rendszerben (a nem-inerciarendszerben) mérnek, vesszős jelöléssel látunk el. A vesszőtlen mennyiségeket az inerciarendszerben mérik.



A tömegpont, amelynek a mozgását le akarjuk írni, a vizsgált időpillanatban éppen az A pontban tartózkodik. Az (x,y) inerciarendszerben mért helyvektorát így írhatjuk:

$$\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{r}' = \vec{r}_B + \left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}\right), \tag{1}$$

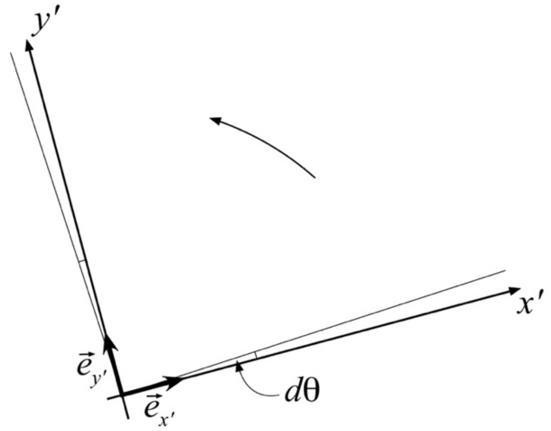
ahol $\vec{r}'$ az (x',y') nem-inerciarendszerben mért helyvektor, $\vec{e}_{x'}$ és $\vec{e}_{y'}$ pedig a gyorsuló vonatkoztatási rendszer x'- és y'-irányú egységvektorai. Amint az alábbi ábra mutatja, ezeknek az egységvektoroknak az idő szerinti deriváltja (változási gyorsasága) így írható:

$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \frac{d\theta \cdot \vec{e}_{y'}}{dt} = \omega \cdot \vec{e}_{y'} \qquad (2)$$

illetve

$$\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = -\frac{d\theta \cdot \vec{e}_{x'}}{dt} = -\omega \cdot \vec{e}_{x'}, \qquad (3)$$

ahol $\omega = \dot{\theta}$ az (x',y') tengelyek szögsebessége.



Ez a szögsebesség vektoriális alakban a következőképpen írható fel:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_{z'}, \qquad (4)$$

ahol $\vec{e}_{z'}$ a z'-irányú egységvektor (amely az ábra síkjából kifelé mutat). Az $\vec{\omega}$ iránya tehát az ún. „jobbcsavar-szabályt“ követi.

A (4) alapján könnyen beláthatóak az alábbi összefüggések:

$$\vec{\omega} \times \vec{e}_{x'} = \omega \cdot \vec{e}_{y'} \qquad (5)$$

és

$$\vec{\omega} \times \vec{e}_{y'} = -\omega \cdot \vec{e}_{x'}. \qquad (6)$$

A (2)-t az (5)-tel, és a (3)-at a (6)-tal összevetve az

$$\dot{\vec{e}}_{x'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{x'} \tag{7}$$

és

$$\dot{\vec{e}}_{y'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{y'} \tag{8}$$

összefüggésekhez jutunk.

A tömegpont (*x*,*y*) inerciarendszerbeli sebességét úgy kapjuk meg, hogy az (1) egyenletet idő szerint deriváljuk:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{\mathrm{B}} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}\right) = \dot{\vec{r}}_{\mathrm{B}} + \left(x'\dot{\vec{e}}_{x'} + y'\dot{\vec{e}}_{y'}\right) + \left(\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'}\right). \tag{9}$$

A (9) jobb oldalán szereplő második tagot (7) és (8) felhasználásával átírhatjuk:

$$x'\dot{\vec{e}}_{x'} + y'\dot{\vec{e}}_{y'} = \vec{\omega} \times \left(x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'}\right) = \vec{\omega} \times \vec{r}', \tag{10}$$

a (9) jobb oldalán szereplő harmadik tag pedig a tömegpontnak a *nem-inerciarendszerben mért* sebességét adja meg:

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'}. \tag{11}$$

(10)-et és (11)-et a (9)-be behelyettesítve a tömegpont sebességére a

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{B}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}' \tag{12}$$

összefüggés adódik, ahol $\vec{v}_{\mathrm{B}}$ az a sebesség amellyel a B origó mozog az inerciarendszerben mérve.

Az A pontban levő tömegpont (inerciarendszerben mért) gyorsulása a (12) idő szerinti deriválásából kapható meg:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\mathrm{B}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{v}}'. \tag{13}$$

A fenti összefüggéseket használva a (13) jobb oldalán szereplő harmadik tag átírható a következő alakba:

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times \vec{v}', \tag{14}$$

a (13) jobb oldalán szereplő negyedik tag pedig ebbe az alakba:

$$\dot{\vec{v}}' = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'}\right) = \dot{x}'\dot{\vec{e}}_{x'} + \dot{y}'\dot{\vec{e}}_{y'} + \ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} =,$$
$$= \vec{\omega} \times \left(\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'}\right) + \vec{a}' = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}', \qquad (15)$$

ahol $\vec{a}'$ a tömegpont gyorsulása *a nem-inerciarendszerben mérve*.

Tehát

$$\vec{a} = \vec{a}_\mathrm{B} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'. \qquad (16)$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt a tömegpont *m* tömegével, és rendezzük át az egyenletet, hogy *úgy nézzen ki*, mint Newton 2. törvénye (amit a gyorsuló megfigyelő nézőpontjából írtunk fel):

$$m\vec{a}' = \vec{F}_e - m\vec{a}_\mathrm{B} + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}} + m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}, \qquad (17)$$

ahol $m\vec{a}$ helyett az eredő erőt, $\vec{F}_e$-t írhattuk be, hiszen Newton 2. törvénye az inerciarendszerben teljesül.

Összefoglalva: ahhoz, hogy a Newton2-höz hasonló egyenletet használhasson, a nem-inerciarendszerbeli megfigyelő kénytelen további "erőket" bevezetni az egyenlet jobb oldalán (az *igazi, fizikai kölcsönhatásokból származó* $\vec{F}_e$ eredő erő mellé). Ezeket a további tagokat tehetetlenségi "erőknek" nevezzük. Ezek nem írnak le semmilyen fizikai kölcsönhatást. Csupán matematikai kifejezések, amelyekre a gyorsuló megfigyelőnek azért van szüksége, mert szeretne Newton 2. törvényéhez hasonló kinézetű egyenletet használni.
A (17) jobb oldalán szereplő tehetetlenségi "erők" elnevezése:

$-m\vec{a}_\mathrm{B}$:	transzlációs tehetetlenségi "erő"
$m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$:	Euler-"erő"
$m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega})$:	centrifugális "erő"
$2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$:	Coriolis-"erő"