METROLÓGIA ÉS HIBASZÁMíTÁS

1. Metrológiai alapfogalmak

A **metrológia** a mérések tudománya, a mérésekkel kapcsolatos ismereteket foglalja össze.

Méréssel egy objektum valamilyen tulajdonságáról számszerű értéket kapunk. A **mérési eredményt** egy számmal (a **mértékszámmal**) és a **mértékegységgel** adjuk meg.

A mérés történhet mérőeszközzel vagy műszerrel. A **mérőeszközzel** való mérésnél az objektum valamilyen tulajdonságát közvetlen összehasonlítással kapjuk meg (pl. ha hosszúságot méterrúddal vagy tömeget kétkarú mérleggel mérünk). A **műszerrel** való mérés viszont közvetett, az objektum és a műszer valamilyen kölcsönhatásából kalibrálással adja meg a mérni kívánt mennyiség értékét. (Pl. az elektromos áram erősségét mérő Deprez-rendszerű ampermérőben a mutató szögelfordulása az áram, a mágneses tér és a rugó kölcsönhatásának az eredménye, de a műszer skálája már áramerősségre van kalibrálva.)

Sok esetben nem tudjuk a jellemezni kívánt mennyiséget közvetlenül mérni, hanem csak más, vele kapcsolatban álló egy vagy több mennyiséget, és az ezekre kapott mérési eredményekből számítással kapjuk a kívánt adatot. Ekkor **közvetett**, illetve **összetett mérésről** beszélünk.

A mérés hibája

A mérést megismételve általában nem kapunk azonos mérési eredményeket. Egyrészt, mert a mérendő mennyiség változhat az idővel. De ha a mérendő mennyiség állandó is, a mérési eredményt a műszer állapota és a megfigyelést végző ember is befolyásolhatja.

Jelöljük a mérni kívánt mennyiség valóságos értékét x_v-vel, a mérési eredményt x_m-mel.

A **mérés hibája**, Δx a mért érték és a valóságos érték különbsége:

$$\Delta x = x_m - x_v \,. \tag{1}$$

Használatos még a relatív hiba:

$$\delta x = \Delta x / x_v \,. \tag{2}$$

A mérés megbízhatóságát elsősorban a mérőműszer jellemzői határozzák meg.

A műszerek jellemzői

Érzékenység: Azt adja meg, hogy a mérendő mennyiség egységnyi változásához a műszerről közvetlenül leolvasható érték mekkora megváltozása tartozik. Ez a műszerről leolvasható legkisebb egységnek (skálarésznek) megfelelő mérendő mennyiség reciproka. (Pl. ha egy mutatós mA-mérő végkitérése 250 mA, a skálája lineáris és 50 beosztású, akkor a műszer érzékenysége 50 skr / 250 mA = 0,2 skr/mA.) Ha a skála nem lineáris, akkor az érzékenység függ attól, hogy milyen érték közelében mérünk.

Pontosság: A mért és valódi érték maximális lehetséges eltérése, a hiba abszolút értékének maximuma.

Reprodukálhatóság: A műszerrel történő ismételt mérésekkel kapható mérési eredmények lehetséges maximális eltérése egymástól.

Hibatípusok

Véletlen hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől mindkét irányban azonos valószínűséggel, véletlenszerűen térnek el. Nagy számú mérés átlagát véve a véletlen hiba tetszőlegesen csökkenthető.

Rendszeres hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől eltérő érték körül ingadoznak. Oka a hibás vagy rosszul beállított műszer, de rendszeres hibát okoz az is, ha elhanyagolunk vagy rosszul veszünk figyelembe valamilyen, a mérést befolyásoló külső tényezőt (pl. hőmérsékletet vagy nyomást).

2. A hibaszámítás alapjai

A hibaszámítás a valószínűségszámítás és matematikai statisztika felhasználásával a mérés során fellépő véletlen hibák becslésére ad módot.

2. 1. Valószínűségszámítási alapfogalmak

Méréssel nemcsak egyetlen objektum valamilyen állandó értékű sajátosságára kaphatunk számszerű értéket, hanem jellemezhetjük egy objektum olyan sajátosságát is, mely időben vagy helyileg változik (pl. beszélhetünk a terem hőmérsékletéről, akkor is, ha a hőmérséklet a radiátor mellett más, mint az ajtó mellett, ill. éjszaka más, mint nappal). Vagy jellemezhetünk egy olyan egyedekből álló sokaságot, melyekre nézve a mérendő tulajdonság különböző mértékű (pl. megadhatjuk az évfolyamon a hallgatólányok átlagos magasságát). Egy sokaság esetén az egyedi mérések valamilyen átlaga lesz az egész sokaság jellemzője, de tisztáznunk kell, hogy értjük ezt az átlagot.

A sokaságot jellemző számnak az egyedekre is jellemzőnek kell lenni valamilyen módon, a sokaságra vonatkozó adatból bizonyos mértékig meg kell tudnunk jósolni az egyedi mérések eredményét, azaz a sokaság jellemzésénél azt is meg kell adnunk, hogy a megadott átlagérték körül adott valószínűséggel milyen intervallumban lesznek az egyes mérések eredményei. A terem hőmérsékletének megadásánál a termet különböző időpontokban elképzelve tekinthetjük sokaságnak, melynek elemei az egyes időpontokban a terem pillanatnyi állapotai, és ezekben az állapotokban mérhetjük az egyedi hőmérsékletértékeket. De akkor is, ha egy jól meghatározott, időben állandó mennyiséget ismételten mérünk, a műszer időben különböző állapotai, a műszer és a mért objektum, valamint a környezet időben változó kölcsönhatása miatt az ismételt mérés eredményei változni fognak, ezért ezek az elképzelt ismételt mérések megint egy sokaság elemeinek tekinthetők.

Tételezzünk fel egy **sokaságot**, és egy, **a sokaságon értelmezett ξ mennyiséget**. ξ különböző értékeket vehet fel, de egyeseket nagyobb, másokat kisebb valószínűséggel. (Egy hallgatólány magasságát gyakran mérjük 160 és 170 cm közötti értéknek, és a terem hőmérséklete kevéssé valószínű, hogy –10 °C alatt van.) Azt mondjuk, hogy **ξ valószínűségi változó**. Egy valószínűségi változó lehet **folytonos** (mint a magasság vagy hőmérséklet), és lehet **diszkrét** (mint a kockadobálás eredménye). A **sokaság** lehet **véges elemű** (mint a hallgatólányok sokasága), vagy **végtelen elemű** (mint a terem állapota tetszőleges időpontokban).

Amikor mérünk, kiválasztjuk egy egyedét a sokaságnak, és ezen végezzük el a mérést. Azt is mondhatjuk, hogy **mintát veszünk** a sokaságból és azon egy **kísérletet végzünk**. A kísérlet „eredményes” vagy „sikeres”, ha azt kaptuk, amit vártunk (pl. 6-ost a kockadobálásnál). A **sikeres kísérletet** nevezzük **esemény**nek.

Az esemény **valószínűsége P**: az összes lehetséges kedvező kimenetelű mintavétel ill. kísérlet száma (n_k) osztva az összes lehetséges kísérlet számával (N):

$$P = n_k / N \,. \tag{3}$$

A valószínűség pontos értékét meghatározhatjuk, ha van információnk az egész sokaságról. Egyéb esetben a sokaság több-kevesebb elemén végzett kísérlet alapján P értékét becsüljük.

Legyen például a sokaság 100 doboz gyufa, és a ξ *diszkrét* valószínűségi változó a gyufaszálak száma egy dobozban. Ha megvizsgáltuk az összes dobozt és tudjuk, hogy a 100-ból 10 dobozban van 40 szál gyufa, akkor annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott skatulyában pont 40 szál gyufát találjunk,

$P(\xi=40) = P(40) = 10 / 100 = 0{,}1.$

Ha a valószínűségi változó *folytonos*, akkor csak azt kérdezhetjük, hogy egy bizonyos *intervallum*ba eső értéket milyen valószínűséggel vehet fel. Pl. ha a valószínűségi változó a hallgatólányok magassága, és tudjuk, hogy az évfolyam 50 hallgatólányából 10-nek a magassága 160 és 170 cm közé esik, akkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lány h magasságát 160 és 170 cm közöttinek találjuk:

$P(160<h<170) = 10 / 50 = 0{,}2.$

Abban az esetben, ha nincs információnk a teljes sokaságról, hanem N-szer mintát veszünk a sokaságból (N-szer dobunk a kockával, ill. megmérjük N hallgatólány magasságát), azt tudjuk kiszámolni, hogy mennyi az esemény **relatív gyakorisága**. Ha a kísérletet N-szer ismételtük meg, és n esetben kaptunk kedvező eredményt (pl. 40 szál gyufát a gyufaszámlálási kísérletben), akkor a q relatív gyakoriság

$$q = n / N \,. \tag{4}$$

Ha N nő, a relatív gyakoriság a valószínűséghez tart:

$$\lim_{N\to\infty} q = P \,. \tag{5}$$

2.1.2. A valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvény

Jelöljük a ξ folytonos valószínűségi változó aktuális mért értékét x-szel.

$P(x_i < x < x_i+\Delta x)$ annak a valószínűsége, hogy x értéke x_i és $x_i+\Delta x_i$ közé essen. A

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x_i<x<x_i+\Delta x)}{\Delta x} = f(x_i) \tag{6}$$

határérték a ξ változó valószínűségi sűrűsége x_i -nél, az f(x) függvény pedig a ξ eloszlásának **valószínűségi sűrűségfüggvénye** (avagy frekvencia függvénye).

Annak valószínűsége, hogy x értéke x_i és $x_i+\Delta x_i$ közötti értéket vegyen fel, közelítőleg

$$P(x_i \le x \le x_i+\Delta x_i) = f(x_i) \cdot \Delta x, \tag{7}$$

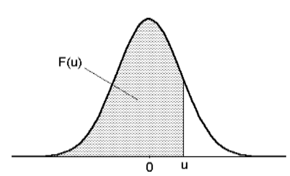
ha Δx elég kicsi.

Általánosan annak valószínűsége, hogy x értéke x_1 és x_2 közé essen:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \,. \tag{8}$$

A valószínűségi sűrűségfüggvény integrálfüggvényét **valószínűségi eloszlásfüggvénynek** nevezzük és F(x)-szel jelöljük:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' \,. \tag{9}$$



$F(x_i)$ annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke nem nagyobb, mint egy adott x_i érték:

$$P(x \le x_i) = F(x_i). \tag{10}$$

Annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke x_1 és x_2 közé esik, megadhatjuk az eloszlásfüggvénnyel is:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1). \tag{11}$$

A valószínűségi sűrűségfüggvény integrálja a valószínűségi változó teljes értelmezési tartományára

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')dx' = P(-\infty \le x \le \infty) = 1 \,, \quad \text{tehát} \quad F(\infty) = 1. \tag{12}$$

2.1.3. Összetett kísérlet eredményének valószínűsége, a mérések függetlensége

Ha két mennyiséget, ξ-t és η-t mérünk egymás után, mi a valószínűsége annak, hogy ξ-re x-et, η-ra y-t kapjunk eredményül? Ha N(y/x) azoknak az eseteknek a száma, amikor η-ra y értéket kapunk, feltéve, hogy ξ-re már x értéket kaptunk, akkor a valószínűség értelmezéséből

$$P(x,y) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(y/x)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(y/x)}{N(x)} \cdot \frac{N(x)}{N} = P(y/x)\cdot P(x). \qquad (13)$$

P(y/x)-et feltételes valószínűségnek nevezzük. **Ha az η változóra vonatkozó kísérlet eredménye nem függ a ξ változótól, akkor**

$$P(y/x) = P(y) \qquad \text{és} \qquad P(x,y) = P(x) \cdot P(y) \,. \qquad (14)$$

Ebben az esetben **a két** esemény vagy kísérlet, ill. **valószínűségi változó egymástól független**. Független események valószínűségei szorzódnak, és ugyanez áll a valószínűségi sűrűségfüggvényekre is.

A mérést általában többször megismételjük, hogy biztosabb eredményt kapjunk. Ilyenkor feltesszük azt, hogy az egyes méréseket egymástól függetlenül végeztük, hogy egy későbbi mérés eredményét nem befolyásolja egy előző eredmény. Vigyázzunk, hogy ez tényleg teljesüljön! Nagyon gyakori a megismételt mérés eredményének önkéntelen szubjektív torzítása!

Az eloszlás paraméterei, a minta jellemzői

A valószínűségi sűrűségfüggvényben szereplő konstansok és az azokból leszármaztatott mennyiségek az **eloszlás paraméterei**. Amikor mintát veszünk a sokaságból és ezen a mintán mérést végzünk, a célunk az, hogy az eloszlásról kapjunk információt. A valószínűségi sűrűség- ill. eloszlásfüggvény alakja vagy ismert, vagy egy meghatározott függvénnyel közelítjük, és a mérésből a függvényben szereplő konstansokat akarjuk meghatározni ill. megbecsülni. A mérési eredményekből az eloszlásparaméterekre kapott becsléseket nevezzük a **minta jellemzőinek**.

A mérés lehetséges kimenetele, a jövőbeli mérési eredmény is valószínűségi változó és így valamilyen valószínűségi sűrűségfüggvény rendelhető hozzá. A mérésnél ténylegesen kapott mérési eredmények viszont konkrét számok, melyekkel kapcsolatban már nincs értelme valószínűségről beszélni.

A mintavételnél is beszélhetünk a majdani mintáról mint sokaságról, melynek elemei – az elképzelt mérési eredmények – valószínűségi változók. Ennek az elképzelt mintának mint sokaságnak a jellemzői szintén valószínűségi változók lesznek.

A következőkben az eloszlás paramétereit – melyek a sokaságra jellemzők – görög, a minta jellemzőit pedig latin betűkkel fogjuk jelölni.

2.1.4. A legfontosabb eloszlásparaméterek

Legyen a sokaságon értelmezve egy ξ valószínűségi változó (egy mérhető tulajdonsága a sokaság elemeinek), melynek mért értékét x-szel jelöljük.

a.) A várható érték

A várható érték a sokaságon értelmezett valószínűségi változót jellemző egyetlen, jól közelítő érték.

Tételezzünk fel egy véges, N elemű sokaságot, melyen értelmezett valószínűségi változó diszkrét értékeket vehet fel (pl. a sokaság 100 doboz gyufa és a valószínűségi változó a gyufaszálak száma egy dobozban). Ha ξ értéke a sokaság n_i számú elemén x_i, akkor x átlagértéke

$$\overline{x} = \sum_i \frac{n_i \cdot x_i}{N} \,,$$

ami felírható úgy is, hogy

$$\overline{x} = \sum_i x_i \cdot P(x_i), \qquad (15)$$

mivel véges sokaság esetén az $n_i / N = q_i$ relatív gyakoriság egyenlő az esemény $P(x_i)$ valószínűségével.

(15)-öt általánosítva tetszőleges eloszlásra definiálhatunk egy, az eloszlásra jellemző paramétert, az eloszlás **várható értékét** az alábbiak szerint:

Ha az eloszlás **diszkrét**, de a sokaság nem feltétlenül véges, és a ξ valószínűségi változó az x_i értéket P_i valószínűséggel veszi fel, akkor **a ξ valószínűségi változó várható értékén**, E[x]-en, ill. a gyakrabban használt jelöléssel μ_x-en, a következő összeget értjük:

$$E[x] = \sum_i x_i \cdot P(x_i) = \mu_x \,. \tag{16}$$

Ha az eloszlás **folytonos**, és az eloszlás valószínűségi sűrűségfüggvénye f(x), akkor (16) analógiájára az E[x], ill. μ_x **várható érték**

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \mu_x \,. \tag{17}$$

A valószínűségi változó **konstansszorosának** várható értéke a várható érték konstansszorosa:

$$E[c \cdot x] = c \cdot E[x] \,. \tag{18}$$

Két folytonos valószínűségi változó **összegének** várható értéke a két várható érték összege:

$$E[x+y] = E[x] + E[y] \,. \tag{19}$$

Két **független** valószínűségi változó **szorzatának** várható értéke az egyes várható értékek szorzata:

$$E[x \cdot y] = E[x] \cdot E[y] \,. \tag{20}$$

b.) A medián és a módusz

A eloszlás **mediánja** (μ_e) a valószínűségi változónak az az értéke, melynél kisebb és nagyobb érték is ugyanolyan valószínűségű, azaz ahol az eloszlásfüggvény értéke

$$F(\mu_e) = 0{,}5.$$

Az eloszlás **módusza** a sűrűségfüggvény maximumhelye.

Szimmetrikus eloszlás várható értéke, mediánja és módusza azonos.

c.) A variancia és a szórás

A valószínűségi változó értéke kisebb vagy nagyobb mértékben eltérhet a várható értéktől a sokaság elemein. A **variancia** ennek az eltérésnek a mértéke. Folytonos eloszlás esetén

$$Var[x] = E[(x-\mu_x)^2], \text{ tehát}$$

$$Var[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu_x\right)^2 \cdot f(x)\, dx \,. \tag{21}$$

Változó **konstansszorosának** varianciája a variancia szorozva a konstans négyzetével:

$$Var[c \cdot x] = c^2 \cdot Var[x] \,. \tag{22}$$

Két **független** valószínűségi változó **összegének** varianciája az egyes varianciák összege:

$$Var[x+y] = Var[x] + Var[y] \,. \tag{23}$$

Két **független** valószínűségi változó **szorzatának** varianciája nem egyezik meg viszont a varianciák szorzatával!

A **szórás** a variancia gyöke.

2.2. A normális (Gauss) eloszlás

Normális eloszlást mutatnak azok a valószínűségi változók, melyek értékét sok kismértékű véletlenszerű hatás befolyásolja. A normális eloszlásnál a valószínűségi sűrűségfüggvény az ún. **Gauss-függvény**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \tag{24}$$

ahol μ az eloszlás **várható értéke**, σ pedig a **szórás**, a variancia négyzetgyöke.

A valószínűség számolásához ezt a sűrűségfüggvényt kell integrálni, de ennek a függvénynek nem írható fel zárt alakban primitív függvénye, ezért a számolásoknál először áttérünk az

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{25}$$

transzformációval az ún. **normalizált Gauss-függvényre**:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}, \tag{26}$$

melynek várható értéke 0 és szórása (varianciája) 1.

A normalizált Gauss-eloszláshoz tartozó **F(u) valószínűségi eloszlásfüggvény** ill. ϕ(u) „hibaintegrál”:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \phi(u) \qquad (\text{ahol } F(\infty) = 1). \tag{27}$$

Ennek a függvénynek az értékeit matematikai kézikönyvekben táblázatosan megtaláljuk.

1. táblázat: A normális eloszlás F(u) eloszlásfüggvénye, a ϕ(u) hibaintegrál értékei

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81589	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93180
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99001	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99369	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	994920,	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99586	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99830	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99860
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900

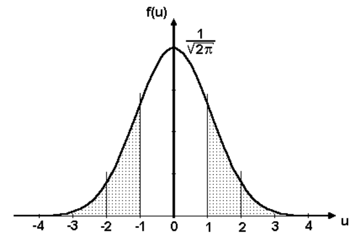
A Gauss-eloszlás alkalmazása

Tételezzük fel, hogy ismerjük egy adott sokaságban egy bizonyos valószínűségi változó eloszlását, és ez normális eloszlás, adott μ várható értékkel és σ szórással. Milyen valószínűséggel esik a valószínűségi változó értéke a várható érték körüli, adott Δx sugarú intervallumba, tehát $x_1 = \mu-\Delta x$ és $x_2 = \mu+\Delta x$ közé?

Ilyen feladatoknál az aktuális változót (25) alapján úgy transzformáljuk, hogy normalizált Gauss-eloszlást kapjunk. Az intervallum végpontjai:

$$u_1 = -\Delta x/\sigma \quad \text{és} \quad u_2 = \Delta x/\sigma\ , \tag{28}$$

(11)-et alkalmazva a valószínűség felírható az eloszlásfüggvénnyel:



$$P(u_1 \le u \le u_2) = F(u_2) - F(u_1)\ ,$$

ill. $u_2 = v$ jelöléssel (ekkor $u_1 = -v$)

$$P(-v\le u\le v) = \phi(v) - \phi(-v).$$

A táblázatokban csak pozitív argumentumra találjuk meg a ϕ hibaintegrált, ezért $\phi(-v)$ értékét ki kell fejeznünk $\phi(v)$-vel. Az ábrán a két pöttyözött terület a függvény szimmetriája miatt egyenlő, tehát

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u)\ , \tag{29}$$

amiből

$$P(-v\le u\le v) = 2\,\phi(v) - 1\ .$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy a változó értéke kiessen az adott szimmetrikus intervallumból, tehát egy adott tűrésnél jobban eltérjen a várható értéktől:

$$P(u\le -v \cup u\ge v) = 1 - (2\,\phi(v) - 1) = 2\,(1 - \phi(v))\ . \tag{30}$$

Célszerű megjegyezni, hogy a normális eloszlásnál a várható érték körüli σ sugarú intervallumba ($v=1$) a valószínűségi változó értéke 68,3%, a 2σ sugarú intervallumba pedig ($v=2$) kb. 95,4% valószínűséggel esik.

Példa

Az évfolyamon 80 lány van, a magasságeloszlásuk valószínűségi sűrűségfüggvénye a magasságot h-val jelölve és cm-ben mérve:

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-165}{5}\right)^2}\ .$$

a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott lány magassága 160 és 170 cm között legyen?

b) Várhatóan hány magasabb 160 cm-nél?

c) Várhatóan hánynak a magassága 170 cm és 175 cm közötti?

d) Van-e 175 cm-nél magasabb, ill. 150 cm-nél alacsonyabb lány?

Megoldás:

A hallgatólányok magasságeloszlása normális eloszlást követ $\mu = 165$ cm várható értékkel és $\sigma = 5$ cm szórással.

Térjünk át a normalizált eloszlásra és keressük ki a normalizált Gauss-eloszlás táblázatából a $\phi(u)$ függvény értékeit.

a) $h_1 = 160$ cm $\rightarrow$ $u_1 = (160\text{-}165)/5 = -1$; $h_2 = 170$ cm $\rightarrow$ $u_2 = (170\text{-}165)/5 = 1$;
$P(160\le h\le 170) = P(-1\le u\le 1) = \phi(1) - \phi(-1) = \phi(1) - (1-\phi(1)) = 2\,\phi(1) - 1 = 2\cdot 0{,}84134-1 = 0{,}68268 = 68{,}27\%$.

b) $P(160<h) = P(-1<u) = 1 - P(u<-1) = 1 - \phi(-1) = 1 - (1-\phi(1)) = \phi(1) = 0{,}84134$,
N = 80 lányból $n_{>160} = 0{,}84134\cdot 80 = 67{,}31$ $\rightarrow$ várhatóan 67 lánynak a magassága nagyobb 160 cm-nél.

c) $h_3 = 175$ cm $\rightarrow$ $u_3 = (175\text{-}165)/5 = 2$;
$P(170\le h\le 175) = P(1\le u\le 2) = \phi(2) - \phi(1) = 0{,}97725 - 0{,}84134 = 0{,}13591$.
N = 80 lányból $n_{[170;175]} = 0{,}13591\cdot 80 = 10{,}87$ $\rightarrow$ várhatóan 11 lány magassága esik 170 és 175 cm közé.

d) $P(175<h) = P(2<u) = 1 - P(2\le u) = 1 - \phi(2) = 1-0{,}97725 = 0{,}02275$;
$n_{>175} = 0{,}02275\cdot 80 = 1{,}82$ $\rightarrow$ várhatóan 2 lány magasabb 175 cm-nél.
$h_4 = 150$ cm $\rightarrow$ $u_4 = (150-165)/5 = -3$;
$P(h<150) = P(u<-3) = \phi(-3) = 1 - \phi(3) = 1-0{,}99865 = 0{,}00135$;
$n_{<150} = 0{,}00135\cdot 80 = 0{,}108$ $\rightarrow$ várhatóan nincs 150 cm-nél alacsonyabb lány.

Miért élünk olyan gyakran azzal a feltételezéssel, hogy az eloszlásunk normális eloszlást követ?

A *centrális határeloszlás tétele* szerint bármilyen eloszlású sokaság esetén az n elemű minta számtani középértékének eloszlása a minta elemszámának növekedésével egy olyan normális eloszláshoz tart, melynek várható értéke megegyezik az eredeti eloszlás várható értékével.

Ez azt jelenti, hogy ha már egyetlen mérési eredmény is átlagnak, pl. időátlagnak tekinthető, akkor várható, hogy az normális eloszlású lesz. A mérési eredmények nagyon gyakran ilyen átlagértékek. Mutatós műszernél a mutató a tehetetlensége miatt egy átlagértéknek megfelelő helyzetbe áll be. Ha elektronikusan gyűjtünk adatot, azt is egy bizonyos ideig tesszük, és az átlagjelet dolgozzuk tovább fel, ill. a kijelzőn az átlag jelenik meg. Így a gyakorlatban legtöbbször normális eloszlású mérési eredményekkel találkozunk.

2.4. A középérték eloszlásának tulajdonságai

Mérjük egy sokaságon a ξ sajátosságot n-szer. Képzeljünk el egy n mérésből álló mintát, ahol az egyes mérések (egyelőre elképzelt) eredményei $x_1,...,x_n$. Ezek valószínűségi változók, még nem tudjuk, milyen értéket kapnak a mérésnél. Az $x_1,...,x_n$ valószínűségi változók számtani közepe

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{31}$$

szintén valószínűségi változó, tehát tartozik hozzá egy $f(x_1,...,x_n)$ valószínűségi sűrűségfüggvény, és kérdezhetjük, mi ennek a várható értéke és varianciája. Az egyes mérési eredmények függetlenek egymástól, tehát

$$f(x_1,...,x_n) = f(x_1) \cdot ... \cdot f(x_n) \ . \tag{32}$$

Mivel ugyanazt a mérést ismételjük, az egyes mérési eredmények várható értéke $E[x_i] = \mu$ és varianciája $Var[x_i] = \sigma^2$ azonos minden egyes mérésre. Az összeg és konstansszoros várható értékére és varianciájára felírható (18), (19), (22), (23) formulákat alkalmazva kapjuk, hogy

$$E[\overline{x}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \mu \qquad \text{és} \tag{33}$$

$$Var[\overline{x}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var[x_i] = \frac{1}{n} Var[x] = \frac{1}{n} \sigma^2 \ , \tag{34}$$

azaz a középérték várható értéke megegyezik az egyes mérések várható értékével, varianciája viszont n-ed része az egyes mérések varianciájának. Ez azt jelenti, hogy a mérések számának növelésével a kérdéses mennyiség várható értékét egyre kisebb szórással kapjuk meg, n mérés elvégzése esetén az átlagérték szórása az egyszeri mérés szórásának $\sqrt{n}$-ed részére csökken.

3. A mérés eredményének megadása

Ha ismerjük egy valószínűségi változó eloszlását (azaz a valószínűségi sűrűségfüggvényt és az eloszlásparaméterek értékét), akkor meg tudjuk mondani, hogy egy bizonyos intervallumhoz mekkora valószínűség tartozik. Ez azt jelenti, hogy ha az adott eloszlást követő mennyiség értékeire méréseket hajtunk végre, akkor meghatározható, hogy mekkora valószínűséggel esik egy mért érték egy bizonyos intervallumba (vagyis hogy az eredményeket adott valószínűséggel milyen intervallumban kapjuk meg – pl. az eloszlás várható értéke körül). Pl. tudjuk, hogy normális eloszlásnál az egyes mérési eredmények a μ várható érték körüli σ sugarú intervallumba 68,3% valószínűséggel, a 2σ sugarú intervallumba 95,4% valószínűséggel esnek. Ha más P valószínűséggel – P **konfidenciaszinten** – akarjuk megjósolni a mérési eredményeket, az intervallum szélessége meghatározható a valószínűség ismeretében. Az intervallum szélességét célszerű k·σ alakban, tehát a szórás valahányszorosaként felírni (ekkor k értéke éppen a normalizált változóval egyenlő). A normalizált Gauss-eloszlás táblázata segítségével kiszámolható, hogy mi lesz az a

$$[\mu - k\cdot\sigma \ , \ \mu + k\cdot\sigma \ ]$$

konfidenciaintervallum, melybe a mérési eredmények az adott P valószínűséggel beleesnek.

Mérésnél a mérési eredmények alapján szeretnénk választ kapni arra a kérdésre, hogy az adott mennyiség valóságos értéke milyen intervallumba mekkora valószínűséggel esik. Hogyan értékeljük ki a méréssorozatot, hogy a legmegbízhatóbb információt kapjuk a valóságos értékről, azaz a valószínűségi változó várható értékéről? Ha legalább a mérés szórását ismernénk, mondhatnánk, hogy egy-egy mérési eredmény ugyanolyan távol van a valóságos várható értéktől, mint fordítva: azaz ha a valóságos érték $k\cdot\sigma$ sugarú környezetébe esnek P valószínűséggel a mérési eredmények, akkor P valószínűséggel a mérési eredmény $k\cdot\sigma$ sugarú környezetébe esik a mérendő mennyiség várható értéke. (Egy mérési sorozat esetén pedig az várható, hogy a sorozat számtani közepének (az átlagnak) a $k\cdot\sigma/\sqrt{n}$ sugarú környezetébe esik P valószínűséggel a valóságos érték.)
Mivel sem a várható értéket, sem a szórást nem ismerjük, első lépés becslést adni a várható értékre és a szórásra a mért értékek alapján.

3. 1. Az eloszlásparaméterek becslése

A mintavétel és mérés célja az, hogy információt kapjunk a sokaságon az adott tulajdonság eloszlásáról, azaz meg tudjuk becsülni az eloszlásparamétereket (a várható értéket és a varianciát ill. szórást) *a sokaság elemszámánál sokkal kisebb minta* alapján.

A becsült paramétereket hullámvonallal fogjuk jelölni. Egy becslés **torzítatlan** a Θ paraméterre nézve, ha a becsült érték és a valóságos várható érték megegyezik, azaz

$$E[\widetilde{\Theta}] = \Theta ,$$

vagy

$$E[\widetilde{\Theta}-\Theta] = 0,$$ a becslés hibájának várható értéke 0.

3.1.1. A várható érték becslése

A várható értéket úgy vezettük be véges elemű, diszkrét sokaságra, mint az adott tulajdonságnak a sokaságra vett átlagát (16). Ha most nem az egész sokaságot vesszük, csak egy mintát belőle, becsülhetjük úgy az egész sokaságra vonatkozó átlagot, hogy csak a mintára átlagolunk, azaz a várható értéket, μ-t a következőképp becsüljük:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; . \tag{35}$$

Amíg a mérésről csak beszélünk, $\tilde{\mu}$ valószínűségi változó, az x_i valószínűségi változók számtani közepe. A konstansszorosra és az összegre vonatkozó (18), (19) összefüggések alapján látható, hogy a számtani közép várható értéke megegyezik az egyes mérés várható értékével. Tehát $\tilde{\mu} = \mu$, a becslés torzítatlan.

A várható értéket tehát a számtani középpel becsüljük:

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \; . \tag{36}$$

3.1.2. A variancia becslése

A várható érték becsléséhez hasonlóan okoskodva a varianciát becsülhetjük az egyes mérések hibanégyzetének (azaz az átlagtól vett eltérések négyzetének) átlagával:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^2 \; . \tag{37}$$

A várható érték konstansszorosára és az összegére vonatkozó (18), (19) összefüggések segítségével (elég hosszú átalakítással) azonban belátható, hogy

$$E[\tilde{\sigma}^2] = (n-1)/n \cdot\sigma^2, \tag{38}$$

tehát ez a becslés torzított. A torzítatlan becslés a varianciára a következőképpen számolható:

$$\sigma^2 = s_x{}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\overline{x})^2 \; . \tag{39}$$

s_x -et az egyes mérési eredmények korrigált tapasztalati szórásának nevezzük.

A középérték korrigált tapasztalati szórása (standard deviációja), $s_{\overline{x}}$ pedig

$$s_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \;, \tag{40}$$

mivel (34) szerint a középérték varianciája az egyes mérések varianciájának n-ed része, így a szórása az egyes mérések szórásának $\sqrt{n}$-ed része.

3.2. A Student-féle t-eloszlás és t paraméter

A célunk az, hogy megadjuk, hogy a méréseink középértéke mennyire jó becslése a várható értéknek, azaz bizonyos P valószínűségi, azaz konfidenciaszinten a középérték körül vett mekkora intervallumba esik a várható érték.

A várható érték és a szórás pontos értékének ismeretében meghatározható lenne, hogy mekkora valószínűséggel esik egy mért érték, ill. több mérés átlaga egy bizonyos (várható értékre szimmetrikus) intervallumba. A várható érték és a szórás becsült értékét használva azonban ugyanahhoz a valószínűséghez nagyobb számmal kell megszorozni a becsült szórást a konfidenciaintervallum meghatározásánál, mint ezt egy ismert szórású normális eloszlásnál tennénk, mivel becsült értékekkel dolgozunk. Kérdés, hogy mekkora ez a szorzószám.

Írjuk fel a jellemezni kívánt valószínűségi változó várható értéke, μ_x, valamint a méréssorozatból számított középérték, $\overline{x}$ és a középérték korrigált tapasztalati szórása, $s_{\overline{x}}$ között a következő összefüggést:

$$\overline{x} = \mu_x + \tau \cdot s_{\overline{x}} \;. \tag{41}$$

Mivel $\overline{x}$ és $s_{\overline{x}}$ a konkrét méréssorozattól függ, tehát véletlenszerűen változik, a $\tau = (\overline{x} - \mu_x)/s_{\overline{x}}$ paraméter – mint az $\overline{x}$ és $s_{\overline{x}}$ valószínűségi változók függvénye – szintén valószínűségi változó, melynek eloszlása meghatározható $\overline{x}$ és $s_{\overline{x}}$ eloszlásából. Az eredeti x változóra Gauss-eloszlást feltételezve W.S. Gosset határozta meg a τ paraméter valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvényét, de mivel munkáit Student (diák) névvel szignálta, a τ paraméter eloszlását "Student-féle t-eloszlásnak" hívják. Az eloszlás- és sűrűségfüggvény függ a mérések számától, ezek számának növelésével az $f(\tau)$ sűrűségfüggvény félértékszélessége csökken.

Annak a valószínűsége, hogy τ értéke egy $[-t, t]$ intervallumba essen:

$$P\,(-t \le \tau \le t) = 2\,F(t) - 1, \tag{42}$$

mivel τ várható értéke 0, és $f(\tau)$ szimmetrikus.

Ekkora annak a valószínűsége, hogy $\overline{x}$ és μ_x eltérése a $[\,-t \cdot s_{\overline{x}},\ +t \cdot s_{\overline{x}}\,]$ intervallumba essen, azaz hogy a meghatározandó μ_x várható érték az $[\,\overline{x} - t \cdot s_{\overline{x}}\,,\ \overline{x} + t \cdot s_{\overline{x}}\,]$ intervallumba essen.

Az adott P valószínűséghez (konfidenciaszinthez) tartozó szorzófaktort (t) Student paraméternek nevezzük. Értéke függ a mérések számától is. A Student-féle t paraméter értéke a P valószínűség és az n mérésszám alapján a Student-táblázatból határozható meg.

A Student-féle t paraméter értékei P konfidenciaszintnél és n mérésszámnál

n \ P	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
2	3,078	6,314	12,706	25,452	63,657	127,32
3	1,886	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
4	1,638	2,353	3,182	4,176	5,841	7,453
5	1,533	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
6	1,476	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
7	1,440	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
8	1,415	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
9	1,397	1,860	2,306	2,752	3,355	3,832
10	1,383	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
20	1,328	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
∞	1,282	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807

3.3. Méréssorozat kiértékelésének lépései
A fentiek alapján egy n mérésből álló sorozat kiértékelése a következőképp történik.

Meghatározzuk a mérési eredmények számtani közepét:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \,. \qquad (43)$$

Meghatározzuk a $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$ devianciákat (az egyes mérési eredmények eltérését a számtani középértéktől), és ezek négyzetét összegezve meghatározzuk a középérték korrigált tapasztalati szórását:

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n\cdot(n-1)}} \,. \qquad (44)$$

A mérések számához (n) és a kívánt konfidenciaszinthez (P) tartozó t paraméterértéket kikeressük a Student-táblázatból.

Meghatározzuk a konfidenciaintervallum (hibaintervallum) sugarát:

$$\Delta x = t \cdot s_{\overline{x}}. \qquad (44)$$

Megadjuk a mérési eredményt a következő formában:

$$\xi = (\, \overline{x} \pm \Delta x \,)\ [\text{mértékegység}] \qquad \text{P konfidenciaszinten.} \qquad (45)$$

A felírt végeredmény azt jelenti, hogy a mérendő mennyiség valóságos értéke *a konfidenciaszintnek megfelelő valószínűséggel* az $[\, \overline{x} - t\cdot s_{\overline{x}} \,,\, \overline{x} + t\cdot s_{\overline{x}} \,]$ intervallumba esik.

A konfidenciaintervallum felírásánál figyeljünk arra, hogy hány értékes jegyet adunk meg a végeredményben! Nincs értelme a hibaintervallumot pontosabban megadni, mint az átlagértéket. Első lépésben a hibaintervallumot kerekítjük. A hibaintervallumot általában két értékes jeggyel adjuk meg, illetve 1-essel kezdődő értékeknél szokás 3 értékes jegyet használni. Ezután a hibaintervallumhoz igazítjuk azt, hogy a valódi értéket milyen pontossággal adjuk meg: olyan helyiértékkel, ami a hibaintervallum két értékes jegyének felel meg.

Példa / 1.

Van egy nagy kupac ismeretlen névleges értékű ellenállásunk. Kiveszünk belőle 6 db-ot és megmérjük azok ellenállását. A következő értékeket kapjuk:

98 Ω 100 Ω 101 Ω 99 Ω 101 Ω 101 Ω

Számoljuk ki ennek alapján az ellenállásaink névleges értékét, és a hibaintervallumot 99%-os konfidenciaszinten!

Megoldás:

A mért értékek átlaga $\bar{R} = 100\ \Omega$.

A középérték korrigált tapasztalati szórása

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{(98-100)^2 + (100-100)^2 + (101-100)^2 + (99-100)^2 + (101-100)^2 + (101-100)^2}{6\cdot 5}} = \sqrt{\frac{8}{30}} = 0{,}5164\ \Omega.$$

A táblázatból a Student-paraméter értéke n = 6 és P = 0,99 esetén t = 4,032.

A hibaintervallum, azaz a konfidenciaintervallum sugara

$$\Delta R = t \cdot s_{\bar{R}} = 4{,}032 \cdot 0{,}5164 = 2{,}082\ \Omega\ .$$

Tehát az ellenállások értéke P = 99%-os konfidenciaszinten

$R = (\ 100{,}0 \pm 2{,}1\ )\ \Omega$ intervallumba esik.

4. Közvetett mérés hibája, Gauss-féle hibaterjedés

Tegyük fel, hogy meg akarjuk határozni egy olyan ϕ mennyiség értékét, melyet nem tudunk közvetlenül mérni, de ϕ függ az x,y,z,... mennyiségektől, és az utóbbiak viszont közvetlenül mérhetők; ismerjük várható értéküket és varianciájukat, illetve mérés alapján megbecsültük ezeket a paramétereket. A kérdés az, hogyan függ ϕ várható értéke és varianciája az x,y,z,... várható értékétől és varianciájától.

Fejtsük sorba ϕ -t változóinak várható értéke körül, és álljunk meg a lineáris tagoknál:

$$\phi(x,y,..) = \phi(\mu_x,\mu_y,...) + \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\mu_x,\mu_y,...} \cdot (x-\mu_x) + \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\mu_x,\mu_y,...} \cdot (y-\mu_y) + ...\ . \tag{46}$$

A $\left.\frac{\partial \phi}{\partial\ .}\right|_{\mu_x,\mu_y,...}$ parciális differenciálhányadosok az $x = \mu_x$, $y = \mu_y$,... helyen értendők, de a továbbiakban rövidítjük $\frac{\partial \phi}{\partial\ .}$ jelöléssel.

A lineáris sorfejtés a várható értékektől való kis eltérések esetén jó közelítés.

Először határozzuk meg ϕ várható értékét. Alkalmazva az összeg és konstansszoros várható értékére vonatkozó összefüggéseket (azaz hogy E[a+b] = E[a]+E[b] és E[c·a] = c·E[a]) :

$$E[\phi(x,y,..)] = E[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot E[x-\mu_x] + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot E[y-\mu_y] + ...\ . \tag{47}$$

Mivel $E[x-\mu_x] = E[y-\mu_y] = 0$ és $E[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] = \phi(\mu_x,\mu_y,...)$, ezért

$$E[\phi(x,y,..)] = \phi(\mu_x,\mu_y,...). \tag{48}$$

Most határozzuk meg ϕ varianciáját a fenti közelítés alapján. Alkalmazva az összeg és konstansszoros varianciájára vonatkozó összefüggéseket (azaz hogy $Var[c\cdot a] = c^2\cdot Var[a]$, és független változók esetén Var[a+b] = Var[a]+Var[b]) :

$$Var[\phi] = Var[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \cdot Var[x] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \cdot Var[y] + ...\ . \tag{49}$$

Mivel $Var[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] = 0$, ezért

$$Var[\phi] = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \cdot Var[x] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \cdot Var[y] + ...\ . \tag{50}$$

A mérési eredmények alapján ismertek az x,y,z,... mért mennyiségek várható értékének becslésére szolgáló középértékek ($\bar{x}$, $\bar{y}$, …), és a varianciájuk becslésére szolgáló korrigált tapasztalati szórás-négyzetek ($s_{\bar{x}}^2$, $s_{\bar{y}}^2$, …), vagy egy adott P konfidenciaszintre vonatkozó hibaintervallumok (Δx, Δy, …).
Ezek felhasználásával

a **ϕ mennyiség várható értéké**nek becslése

$$E[\phi(x,y,..)] = \bar{\phi} = \phi(\bar{x}, \bar{y}, \dots) , \qquad (51)$$

és a ϕ középértékének korrigált tapasztalati szórására szolgáló becslés

$$s_{\bar{\phi}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},\dots}\right)^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 + \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},\dots}\right)^2 \cdot s_{\bar{y}}^2 + \dots} \; . \qquad (52)$$

Az utóbbi egyenlőség érvényes akkor is, ha a középértékek korrigált tapasztalati szórását beszorozzuk az adott konfidenciaszinthez tartozó t paraméterrel, azaz igaz lesz a hibaintervallumokra is. Ha az x,y,… mennyiségek Δx, Δy, … hibaintervallumai azonos konfidenciaszintre ismertek, akkor ugyanezen a konfidenciaszinten a **ϕ mennyiség hibaintervallumára** szolgáló becslés:

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},\dots}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},\dots}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \dots} \; . \qquad (53)$$

A derivált függvényekbe az egyes mennyiségek átlagértékeit kell behelyettesíteni (mert a levezetésnél abból indultunk ki, hogy a függvényt a várható értékek körül fejtjük sorba).

Példa / 2. Az 1. példában kiszámolt $R_1 = (100{,}0 \pm 2{,}1)\ \Omega$ névleges értékű és konfidenciaintervallumú ellenállásaink mellett van egy másik kupac ellenállásunk is, aminek névleges értéke és konfidenciaintervalluma ugyancsak 99%-os konfidenciaszinten $R_2 = (400{,}0 \pm 4{,}3)\ \Omega$.

Mindkét kupacból egyet-egyet véletlenszerűen kiválasztva …

A. … sorosan kapcsoljuk őket. Mennyi lesz a soros eredő várható értéke és hibaintervalluma?

Megoldás:

$\bar{R}_1 = 100{,}0\ \Omega$; $\bar{R}_2 = 400{,}0\ \Omega$; $\Delta R_1 = 2{,}1\ \Omega$; $\Delta R_2 = 4{,}3\ \Omega$.

A soros eredő számítására szolgáló függvény: $R_{soros}(R_1,R_2) = R_1 + R_2$.

A soros eredő várható értéke

$$\bar{R}_{soros} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 100{,}0 + 400{,}0 = 500{,}0\ \Omega.$$

Az $R_{soros}(R_1,R_2) = R_1 + R_2$ függvény parciális deriváltja R_1 ill. R_2 szerint

$$\frac{\partial R_{soros}}{\partial R_1} = \frac{\partial R_{soros}}{\partial R_2} = 1.$$

A soros eredő ellenállás hibaintervalluma

$$\Delta R_{soros} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{soros}}{\partial R_1}\right)^2 \cdot (\Delta R_1)^2 + \left(\frac{\partial R_{soros}}{\partial R_2}\right)^2 \cdot (\Delta R_2)^2} = \sqrt{1^2 \cdot 2{,}1^2 + 1^2 \cdot 4{,}3^2} = 4{,}785\ \Omega.$$

Tehát a soros eredő értéke az adott P = 99%-os konfidenciaszinten az

R_{soros} = (500,0 $\pm$ 4,8) Ω intervallumba esik.

B. … párhuzamosan kapcsoljuk őket. Mennyi lesz a párhuzamos eredő várható értéke és hibaintervalluma az adott konfidenciaszinten?

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\frac{1}{R_{párh}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Ez az összefüggés alkalmas a párhuzamos eredő ellenállás várható értékének kiszámolására, de a hibaintervallum számolásához szükséges parciális deriválás miatt ezt az összefüggést rendezni kell az $R_{párh}$ mennyiségre:

$$R_{párh}(R_1,R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \ .$$

A párhuzamos eredő várható értéke

$$\overline{R}_{párh} = \frac{100{,}0 \cdot 400{,}0}{100{,}0 + 400{,}0} = 80{,}0\ \Omega.$$

Az $R_{párh}(R_1,R_2) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ függvény parciális deriváltja R_1 szerint:

$$\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_1} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2 \cdot 1}{(R_1 + R_2)^2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2,$$

és hasonlóan R_2 szerint

$$\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2.$$

Az $\overline{R}_1$ = 100,0 Ω és $\overline{R}_2$ = 400,0 Ω átlagértékek behelyettesítésével

$$\left.\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_1}\right|_{\overline{R}_1,\overline{R}_2} = \left(\frac{400{,}0}{100{,}0 + 400{,}0}\right)^2 = 0{,}64;$$

$$\left.\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_2}\right|_{\overline{R}_1,\overline{R}_2} = \left(\frac{100{,}0}{100{,}0 + 400{,}0}\right)^2 = 0{,}04.$$

A párhuzamos eredő ellenállás hibaintervalluma

$$\Delta R_{párh} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_1}\right|_{\overline{R}_1,\overline{R}_2}\right)^2 \cdot (\Delta R_1)^2 + \left(\left.\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_2}\right|_{\overline{R}_1,\overline{R}_2}\right)^2 \cdot (\Delta R_2)^2} = \sqrt{0{,}64^2 \cdot 2{,}1^2 + 0{,}04^2 \cdot 4{,}3^2} = 1{,}355\ \Omega.$$

Tehát a párhuzamos eredő értéke az adott P = 99% konfidenciaszinten az

$R_{párh}$ = (80,0 $\pm$ 1,4) Ω vagy $R_{párh}$ = (80,0 $\pm$ 1,36) Ω

intervallumba esik.

5. Gyakorló feladatok

1. Egy test átlagsebességét szeretnénk kiszámolni. Mérések alapján meghatároztuk, hogy a test egy $s = (28{,}65 \pm 0{,}42)$ m utat $t = (6{,}72 \pm 0{,}134)$ s alatt tesz meg (mindkét mérés azonos konfidenciaszintre vonatkozott). Határozzuk meg a test átlagsebességét az s és t mérésének konfidenciaszintjével azonos valószínűségű konfidenciaintervallummal együtt!

Megoldás: $\bar{s} = 28{,}65$ m, $\Delta s = 0{,}42$ m, $\bar{t} = 6{,}72$ s, $\Delta t = 0{,}134$ s.

Az átlagsebesség:

$$v = s / t.$$

Az átlagos értéke

$$\bar{v} = \bar{s} / \bar{t} = 28{,}65 / 6{,}72 = 4{,}263 \text{ m/s}.$$

A $v = s/t$ függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}.$$

Az $\bar{s} = 28{,}65$ m és $\bar{t} = 6{,}72$ s átlagértékeket behelyettesítve

$$\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{\bar{s},\bar{t}} = \frac{1}{6{,}72} = 0{,}1488 \text{ 1/s};$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\bar{s},\bar{t}} = -\frac{28{,}65}{6{,}72^2} = 0{,}6344 \text{ m/s}^2.$$

A konfidenciaintervallum:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{\bar{s},\bar{t}}\right)^2 \cdot \Delta s^2 + \left(\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\bar{s},\bar{t}}\right)^2 \cdot \Delta t^2} = \sqrt{0{,}1488^2 \cdot 0{,}42^2 + 0{,}6344^2 \cdot 0{,}134^2} = 0{,}1055 \text{ m/s},$$

tehát az átlagsebesség értéke az adott konfidenciaszinten

$v = (4{,}26 \pm 0{,}106)$ m/s (vagy: $v = (4{,}26 \pm 0{,}11)$ m/s).

2. $E = (24{,}06 \pm 0{,}38)$ V elektromotoros erejű ideális telepet terhelünk két sorba kötött ellenállással, az egyik $R_1 = (145{,}6 \pm 3{,}2)\ \Omega$, a másik $R_2 = (380{,}4 \pm 6{,}0)\ \Omega$ ellenállású (az értékek azonos konfidenciaszinten vannak meghatározva). Mekkora lesz a mért áram értéke?

Megoldás:

$\bar{E} = 24{,}06$ V, $\Delta E = 0{,}38$ V, $\bar{R}_1 = 145{,}6\ \Omega$, $\Delta R_1 = 3{,}2\ \Omega$, $\bar{R}_2 = 380{,}4\ \Omega$, $\Delta R_2 = 6{,}0\ \Omega$.

Az áram értéke az alábbi függvénnyel számolható:

$$I = E / (R_1 + R_2).$$

Az áram átlagos értéke

$$\bar{I} = 24{,}06 / (145{,}6+380{,}4) = 0{,}04574 \text{ A} = 45{,}74 \text{ mA}.$$

Az $I = E / (R_1 + R_2)$ függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{R_1 + R_2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial R_1} = -\frac{E}{(R_1 + R_2)^2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial R_2} = \frac{\partial I}{\partial R_1}.$$

Az $\bar{E} = 24{,}06$ V, $\bar{R}_1 = 145{,}6\ \Omega$, $\bar{R}_2 = 380{,}4\ \Omega$ átlagértékek behelyettesítésével

$$\left.\frac{\partial I}{\partial E}\right|_{\bar{E},\bar{R}_1,\bar{R}_2} = \frac{1}{145{,}6+380{,}4} = 1{,}901\cdot 10^{-3}\ 1/\Omega, \qquad \Delta E = 0{,}38\ \text{V};$$

$$\left.\frac{\partial I}{\partial R_1}\right|_{\bar{E},\bar{R}_1,\bar{R}_2} = -\frac{24{,}06}{(145{,}6+380{,}4)^2} = -8{,}696\cdot 10^{-5}\ \text{V}/\Omega^2 = -8{,}696\cdot 10^{-5}\ \text{A}/\Omega, \qquad \Delta R_1 = 3{,}2\ \Omega;$$

$$\left.\frac{\partial I}{\partial R_2}\right|_{\bar{E},\bar{R}_1,\bar{R}_2} = -8{,}696\cdot 10^{-5}\ \text{A}/\Omega, \qquad \Delta R_2 = 6{,}0\ \Omega.$$

A konfidenciaintervallum:

$$\Delta I = \sqrt{\left(1{,}901\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}38\right)^2 + \left(-8{,}696\cdot 10^{-5}\cdot 3{,}2\right)^2 + \left(-8{,}696\cdot 10^{-5}\cdot 6{,}0\right)^2} = 9{,}336\cdot 10^{-4}\ \text{A} = 0{,}9336\ \text{mA},$$

tehát

$I = (45{,}74 \pm 0{,}93)$ mA.

3. Egy folyadék sűrűségét szeretnénk meghatározni. Kitöltünk belőle valamennyit egy főzőpohárba és megmérjük ötször a folyadék magasságát a pohárban; a mért értékek:

3,8 cm 3,6 cm 3,8 cm 3,8 cm 4,0 cm

a) Adjuk meg a folyadékoszlop magasságát és annak hibáját 80%-os konfidenciaszinten!

b) Számoljuk ki a folyadék sűrűségét és becsüljük meg a hibáját, ha
a főzőpohár belső átmérője d = 5,2 cm, hibája 0,1 cm;
a főzőpohár tömege üresen $m_{fp} = 82{,}3$ g,
a folyadékkal együtt M = 151,7 g,
és a tömegmérés hibája mindkét esetben 0,1 g.
(A tömeg- és hosszmérésnél leolvasási hibák vannak megadva, ezért nincs több értékes jegyük.)

Megoldás:

1.a) $\bar{h} = 3{,}8$ cm,

$$s_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{(3{,}8-3{,}8)^2 + (3{,}6-3{,}8)^2 + (3{,}8-3{,}8)^2 + (3{,}8-3{,}8)^2 + (4{,}0-3{,}8)^2}{5\cdot 4}} = 0{,}06325\ \text{cm}.$$

A Student-táblázatból $t(n=5, P=0{,}8) = 1{,}533$,

$\Delta h = t \cdot s_{\bar{h}} = 1{,}533\cdot 0{,}06325 = 0{,}09696$ cm,

tehát $P = 80\%$-os konfidenciaszinten $h = (3{,}80 \pm 0{,}100)$ cm.

b) A kiszámolandó mennyiség a mért mennyiségekkel kifejezve:

$\rho = (M - m_{fp}) / (¼\, d^2\, \pi\, h)$.

A sűrűség várható értéke

$\bar{\rho} = (151{,}7 - 82{,}3) / (¼ \cdot 5{,}2^2 \cdot \pi \cdot 3{,}8) = 0{,}85996$ g/cm³ .

A parciális deriváltak és a behelyettesítés:

$$\frac{\partial \rho}{\partial M} = \frac{\partial (M - m_{fp}) / (¼ \cdot d^2 \cdot \pi \cdot h)}{\partial M} = \frac{4}{d^2 \cdot \pi \cdot h} = \frac{1}{V} = 0{,}01239 \ \ 1/\mathrm{cm}^3 , \qquad \Delta M = 0{,}1 \text{ g} ;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m_{fp}} = \frac{\partial (M - m_{fp}) / (¼ \cdot d^2 \cdot \pi \cdot h)}{\partial m_{fp}} = -\frac{4}{d^2 \cdot \pi \cdot h} = -\frac{1}{V} = -0{,}01239 \ \ 1/\mathrm{cm}^3 , \qquad \Delta m_{fp} = 0{,}1 \text{ g} ;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{\partial (M - m_{fp}) / (¼ \cdot d^2 \cdot \pi \cdot h)}{\partial h} = -\frac{4(M - m_{fp})}{d^2 \cdot \pi \cdot h^2} = -\frac{\rho}{h} = -0{,}2263 \ \ \mathrm{g/cm}^4 , \qquad \Delta h = 0{,}1 \text{ cm} ;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = \frac{\partial (M - m_{fp}) / (¼ \cdot d^2 \cdot \pi \cdot h)}{\partial d} = -\frac{2 \cdot 4(M - m_{fp})}{d^3 \cdot \pi \cdot h} = -2\frac{\rho}{d} = -0{,}3308 \ \ \mathrm{g/cm}^4 , \qquad \Delta d = 0{,}1 \text{ cm}^3 .$$

A konfidenciaintervallum

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial M}\right)^2 \cdot \Delta M^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial M_{fp}}\right)^2 \cdot \Delta m_{fp}^{\ 2} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)^2 \cdot \Delta h^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 \cdot \Delta d^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}01239^2 \cdot 0{,}1^2 + (-0{,}01239)^2 \cdot 0{,}1^2 + (-0{,}2263)^2 \cdot 0{,}1^2 + (-0{,}3308)^2 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}04012 \text{ g/cm}^3.$$

Tehát a sűrűség 80%-os konfidenciaszinten

$\rho = (0{,}860 \pm 0{,}040)$ g/cm³.

4. Hatszor megmérjük egy telep elektromotoros erejét, a kapott eredmények:
12,1 12,2 11,9 12,2 11,7 11,9 V.
a) Adjuk meg azt az intervallumot, melybe a telep elektromotoros ereje 95% valószínűséggel esik!
b) A telepet terheljük egy R ellenállással, és mérjük a terhelésen folyó I áramerősséget.
(Az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható.) Szintén 95%-os konfidenciaszintnél
$R = (61{,}2 \pm 1{,}22)\ \Omega$, $I = (0{,}1460 \pm 0{,}0029)$ A.
Határozzuk meg a fentiekből a telep R_b belső ellenállását és annak hibáját!

Megoldás:
2.a. $\bar{E} = 12{,}0$ V.

$$s_{\bar{E}} = \sqrt{\frac{(12{,}1-12{,}0)^2 + (12{,}2-12{,}0)^2 + (11{,}9-12{,}0)^2 + (12{,}2-12{,}0)^2 + (11{,}7-12{,}0)^2 + (11{,}9-12{,}0)^2}{6 \cdot 5}} = 0{,}08165 \text{ V}.$$

A Student-táblázatból $t(n=6, P=0{,}95) = 2{,}571$;

$\Delta E = t \cdot s_{\bar{E}} = 2{,}571 \cdot 0{,}08165 = 0{,}2099$ V;

tehát $P = 95\%$-os konfidenciaszinten $E = (12{,}00 \pm 0{,}21)$ V.

b. $I = E / (R + R_b)$ $\rightarrow$ az R_b belső ellenállás E-vel, R-rel és I-vel kifejezve:

$R_b = E/I - R$.

Az átlagos értéke

$\overline{R_b} = 12{,}00 / 0{,}1460 - 61{,}2 = 20{,}99\ \Omega$.

A parciális deriváltak és az átlagértékek behelyettesítése:

$\frac{\partial R_b}{\partial E} = \frac{\partial (E/I-R)}{\partial E} = \frac{1}{I} = \frac{1}{0{,}1460} = 6{,}849\ \ 1/A$, $\Delta E = 0{,}21\ V$;

$\frac{\partial R_b}{\partial R} = \frac{\partial (E/I-R)}{\partial R} = -1$, $\Delta R = 1{,}22\ \Omega$;

$\frac{\partial R_b}{\partial I} = \frac{\partial (E/I-R)}{\partial I} = -\frac{E}{I^2} = -\frac{12{,}00}{0{,}1460^2} = -563{,}0\ V/A^2 = -563{,}0\ \Omega/A$, $\Delta I = 0{,}0029\ A$.

A konfidenciaintervallum

$$\Delta R_b = \sqrt{\left(\frac{\partial R_b}{\partial E}\right)^2 \cdot \Delta E^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial R}\right)^2 \cdot \Delta R^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial I}\right)^2 \cdot \Delta I^2} =$$

$$= \sqrt{6{,}849^2 \cdot 0{,}21^2 + (-1)^2 \cdot 1{,}22^2 + (-563{,}0)^2 \cdot 0{,}0029^2} = 2{,}495\ \Omega.$$

Tehát a belső ellenállás 95%-os konfidenciaszinten

$R_b = (21{,}0 \pm 2{,}5)\ \Omega$.