6. LOGIKAI ÁRAMKÖRÖK

A **gyakorlat célja**, hogy a hallgatók megismerkedjenek a logikai algebra elemeivel, és képesek legyenek egyszerű logikai függvények realizálására integrált áramkörök (IC-k) felhasználásával.

Számítógépek, műszerek, vezérlő automaták alapvető építőkövei olyan elemek, amelyeknek két állapota lehetséges, és ezeknek az elemeknek az összeköttetése biztosítja a megfelelő működést. (A legegyszerűbb áramköri elem, melynek két állapota lehet, az egyszerű kapcsoló, mely bekapcsolva vezeti az áramot, kikapcsolva pedig nem.) Az ilyen logikai áramkörök tervezésénél az a cél, hogy bizonyos események bekövetkezésétől függően az áramkör meghatározott módon vezéreljen valamilyen eszközt. (Pl. a lift induljon el felfelé, ha a liftben megnyomtak egy magasabb emeletnek megfelelő gombot, vagy ha a lift egy emeleten áll és egy felsőbb emeleten megnyomták a hívógombot, de ne induljon el, ha az ajtó nyitva van, vagy ha túl van terhelve a lift.) Az elvárt működést logikai összefüggésekkel tudjuk megfogalmazni. A lehetséges események bekövetkezése vagy be nem következése, és az eseménykombinációkra adott válasz a *logikai igen*nek illetve *nem*nek feleltethető meg.

Az egyes eseményeket *logikai változóknak* tekinthetjük: olyan változóknak, melyeknek két lehetséges értéke van, 1 és 0. A logikai változó értéke 1, ha az esemény bekövetkezik (vagy ha egy állítás igaz), ill. 0 az ellenkező esetben. (A lift esetében egy-egy logikai változó lehet az, hogy egy-egy emeleten megnyomták-e a gombot, hogy nyitva van-e az ajtó, hogy túl van-e terhelve a lift, hogy elindul-e a lift felfelé ill. lefelé. Pl. ha a 3. és az 5. emeleten megnyomják a gombot, akkor azoknak a változóknak az értéke 1, de a többi emelethez rendelt változók értéke 0.)

A kétállapotú elemek halmazán értelmezhetünk műveleteket. A **Boole-algebra** alapműveletei az összeadás, a szorzás és az inverzképzés, és létezik egység "E" és nulla "0" elem. (Boole-algebra a halmazalgebra is, ahol az összeadás a halmazok egyesítése, a szorzás a halmazok metszete, az inverz a komplementerhalmaz, az egység a mindent magában foglaló halmaz (az univerzum), és a zéró elem az üres halmaz.) Az igaz vagy hamis állításokra vonatkozó algebrát *logikai algebrának* nevezzük. A logikai algebra összefüggései jól szemléltethetők a halmazelméletben megismert Venn-diagrammokkal.

A logikai algebra

Az alaphalmazt alkothatják események (eseményalgebra), vagy kapcsolók (kapcsolóalgebra).

Jelölje **A, B, C, ..., Y** az alaphalmaz az elemeit. Ha egy adott esemény (illetve az esemény bekövetkezésére vagy tényállásra utaló állítás) igaz, vagy egy adott kapcsoló zárt állapotban van, akkor a hozzá rendelt logikai változó értéke 1; ha egy adott esemény hamis, vagy egy adott kapcsoló nyitott állapotban van, akkor a hozzá rendelt logikai változó értéke 0.

A **Boole-algebra** alapműveletei:

Az *<u>összeadás</u>*, illetve „VAGY” („OR”) kapcsolat

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1}$$

eredménye az az esemény, mely bekövetkezik, ha **A** <u>vagy</u> **B** bekövetkezik;
vagyis igaz, ha akár **A**, akár **B** igaz.
(Akkor is igaz, ha **A** és **B** is igaz, tehát nem „kizáró vagy” kapcsolat.)

A *<u>szorzás</u>*, illetve „ÉS” („AND”) kapcsolat

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \tag{2}$$

eredménye az az esemény, mely csak akkor következik be, ha **A** <u>és</u> **B** is bekövetkezik;
vagyis csak akkor igaz, ha **A** és **B** is igaz.

Az összeadásnál értelmezhetünk *<u>nulla-elemet</u>* (**0**) a következőképpen:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}\ . \tag{3}$$

A "**0**" elem az abszolút lehetetlen eseményt jelenti, ill. a mindig hamis állítás.

A szorzásnál értelmezhetünk *<u>egységelemet</u>* ("**E**"):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}\ . \tag{4}$$

E a biztosan bekövetkező esemény, ill. a mindig igaz állítás.

Az egység- és zéróelemre fennáll, hogy tetszőleges **A** elem esetén

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{és} \tag{5a}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \mathbf{E}\ . \tag{5b}$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{ill.} \tag{6a}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}\ . \tag{6b}$$

Minden **A** elemhez létezik az elem *<u>inverze</u>*, $\overline{\mathbf{A}}$, amit az **A** elem *<u>negáltjának, tagadásának</u>* nevezünk.

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}} \tag{7}$$

eredménye hamis, ha **A** igaz, ill. igaz, ha **A** hamis.

Egy elem negáltjának negáltja az eredeti elem:

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}\ , \tag{8}$$

valamint

$$\overline{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \overline{\mathbf{0}} = \mathbf{E}\ . \tag{9}$$

Egy elem és az inverzének összege ill. szorzata:

$$\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}\ , \tag{10}$$

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{0}\ . \tag{11}$$

A logikai műveleteket jellemezhetjük azzal a táblázattal, mely a változók lehetséges értékeihez megadja az eredmény értékét. Ez az úgynevezett ***igazságtáblázat***.

Az alapműveletek igazságtáblázata:

inverz, tagadás, negálás:

A	**Y = $\overline{A}$**
1	**0**
0	**1**

összeadás, „VAGY”, „OR”:

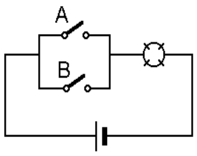
A	**B**	**Y = A + B**
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

szorzás, „ÉS”, „AND”:

A	**B**	**Y = A · B**
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Az összeadást, szorzást, tagadást szemléltethetjük kapcsolókkal is. Legyen az **A** esemény az "A" kapcsoló bekapcsolása, a **B** esemény a "B" kapcsoló bekapcsolása, az **Y** esemény pedig egy lámpa kigyulladása.

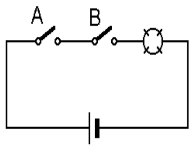
Az összeadás párhuzamosan kötött kapcsolóknak felel meg:



Y = A + B

A lámpa ég, ha <u>bármelyik</u> kapcsoló "BE" állásban van.

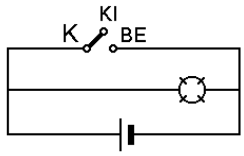
A szorzás a kapcsolók sorba kötésének felel meg:



Y = A B

A lámpa csak akkor ég, ha <u>mindkét</u> kapcsoló "BE" állásban van.

A negálást a fogyasztóval párhuzamosan kötött kapcsolóval valósíthatjuk meg:



Y = $\overline{A}$

A lámpa ég, ha a K kapcsoló "KI" állásban van, ill. nem ég a kapcsoló „BE” állapotában.

A Boole-algebra alapműveleteinek tulajdonságai:

Az összeadás és a szorzás asszociatív:

$$\mathbf{A + (B + C) = (A + B) + C \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C} \tag{12}$$

és kommutatív:

$$\mathbf{A + B = B + A \qquad A \cdot B = B \cdot A} \tag{13}$$

A szorzás és összeadás kétféleképpen is disztributív:

a szorzás disztributív az összeadásra, ahogy a valós számok összeadásánál is:

$$\mathbf{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}\ ; \tag{14}$$

logikai változóknál azonban az összeadás is disztributív a szorzásra:

$$\mathbf{A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)}\ . \tag{15}$$

A fentiekből következik, hogy

$$\mathbf{A + A \cdot B = A}\ , \tag{16}$$

valamint

$$\mathbf{A + \overline{A} \cdot B = A + B}\ , \tag{17a}$$

$$\mathbf{\overline{A} + A \cdot B = \overline{A} + B}\ , \tag{17b}$$

$$\mathbf{A + \overline{A} \cdot \overline{B} = A + \overline{B}}\ , \tag{17c}$$

$$\mathbf{\overline{A} + A \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}}\ . \tag{17d}$$

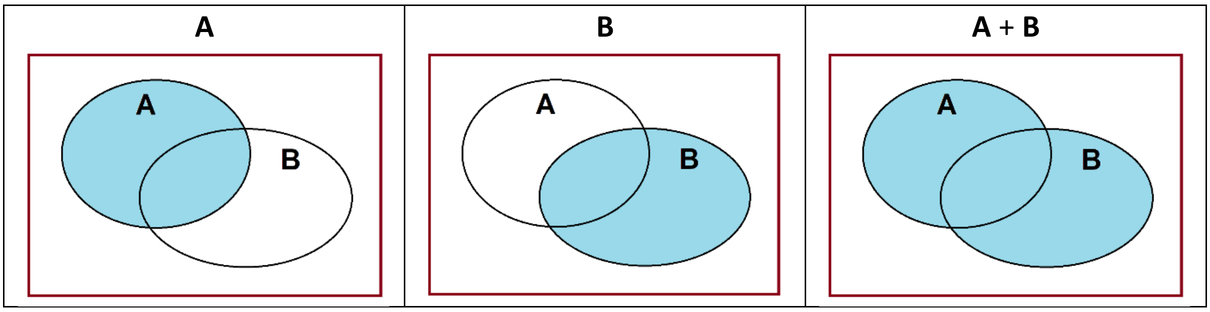
Az összeg és szorzat negáltjára fennállnak a ***De Morgan - azonosságok***:

$$\mathbf{\overline{A + B + C + \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B + C + \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C + \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \dots}, \tag{18a}$$

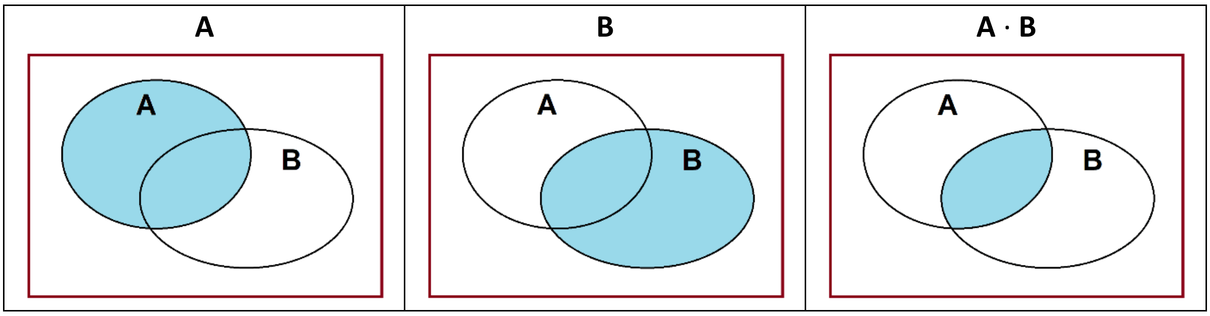
$$\mathbf{\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \dots} = \overline{A} + \overline{B \cdot C \cdot \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C \cdot \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots}\ . \tag{18b}$$

A fenti összefüggéseket szemléltethetjük Venn-diagramokkal:

Összeadás:

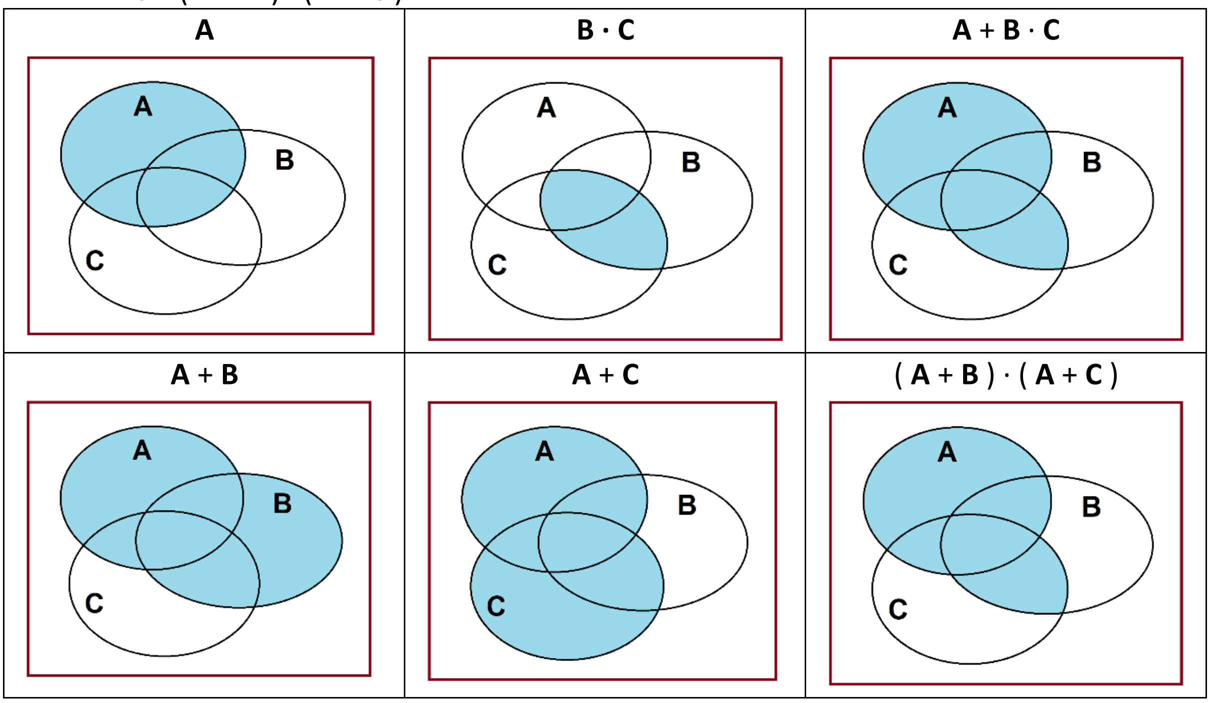


Szorzás:

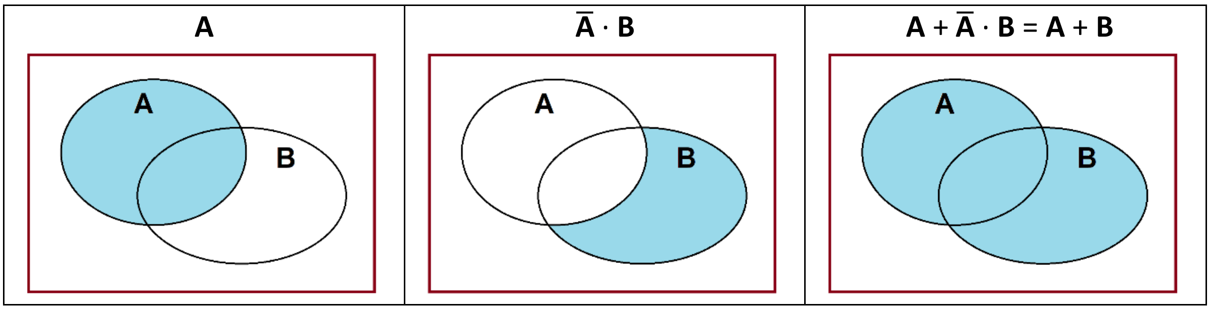


Az összeadás disztributív a szorzásra:

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C) \qquad (15)$$

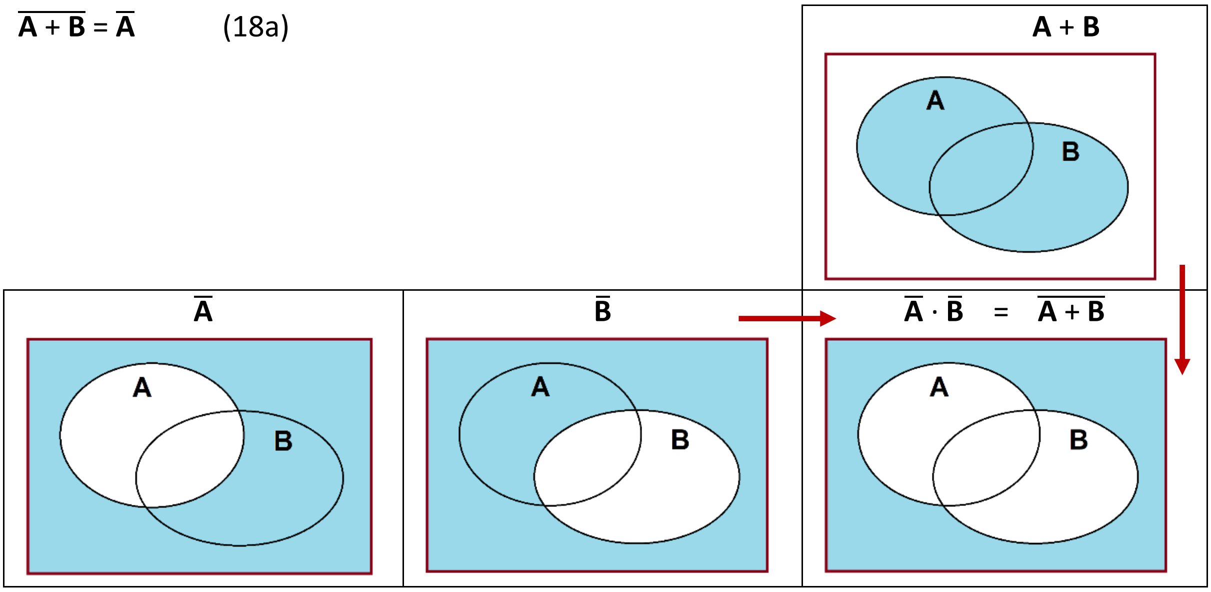


$A + \bar{A} \cdot B = A + B$ (17a)

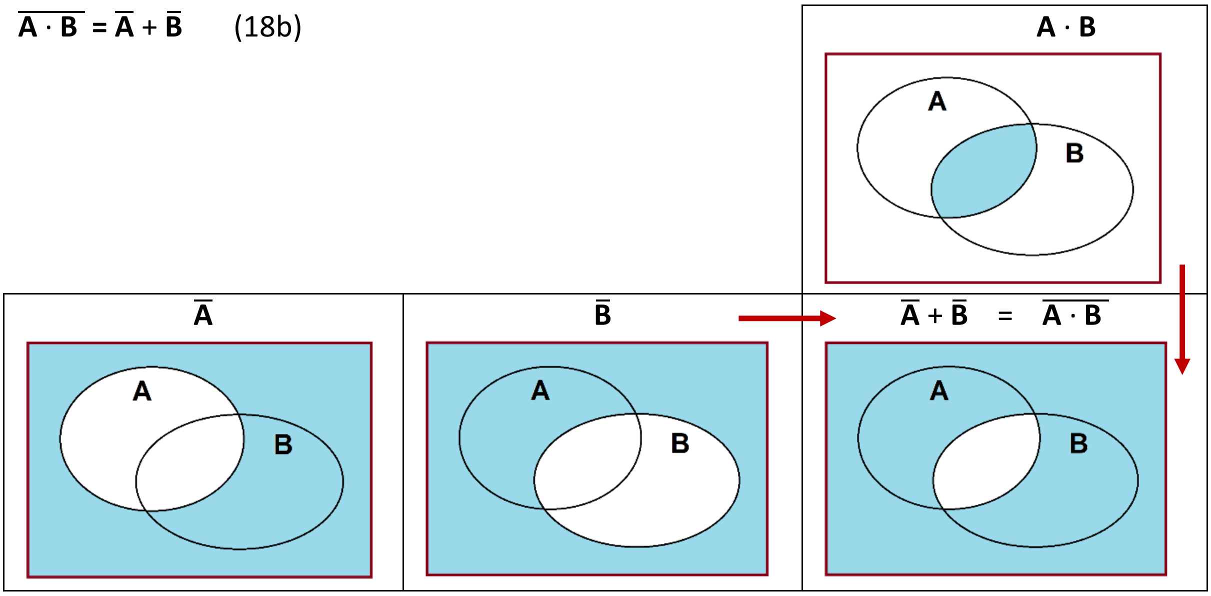


De Morgan - azonosságok:

$\overline{A + B} = \bar{A}$ (18a)



$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ (18b)



A logikai változók halmazán értelmezhetünk *függvényeket*: **Y** = **f** (**A**, **B**, **C**, **...**),
ahol az **A**, **B**, **C**, **...** független változók és az **Y** függvényérték is logikai változók.
Ezeket a függvényeket megadhatjuk a fenti alapvető műveletek kombinációjával, vagy megadhatjuk igazságtáblázattal. (Általánosan egy igazságtáblázatnak mindig 2^n sora van, ahol n a független változók száma.)

Legyen például

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \ .$$

Ennek a függvénynek az igazságtáblázata:

A B C	$A\cdot B$	$B\cdot\overline{C}$	$B+C$	$\overline{B+C}$	$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}+\mathbf{C}}$
0 0 0	0	0	0	1	**1**
0 0 1	0	0	1	0	**0**
0 1 0	0	1	1	0	**1**
0 1 1	0	0	1	0	**0**
1 0 0	0	0	0	1	**1**
1 0 1	0	0	1	0	**0**
1 1 0	1	1	1	0	**1**
1 1 1	1	0	1	0	**1**

Ez a függvény átalakítható egyszerűbb alakra. Kiindulhatnánk a megadott függvényalakból is, de általános esetben az igazságtáblázatot ismerjük, ezért induljunk ki abból.
Írjuk fel először a függvény standard alakját. Egy függvény ***standard alakját*** úgy kapjuk meg az igazságtáblázatból, hogy kiírjuk azokat a sorokat, amelyekre a függvény értéke igaz, vagyis ahol **Y**=**1**, és ezeket a tagokat összeadjuk. Minden ilyen tag tartalmazza az összes (jelen esetben mindhárom) változót (a változóknak ill. a negáltjaiknak a szorzata).
A fenti függvény standard alakja:

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \qquad (19a)$$

A standard alakot az azonosságok felhasználásával egyszerűbb függvényalakra hozhatjuk.
Az egyszerűsítés alapja a (10) összefüggés ($\mathbf{A}+\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$). Olyan tagokat keresünk, amelyekben két tényező megegyezik, a (14) disztributív szabály alapján kiemeljük a közös tényezőket, a zárójelben levő tagok összege **E**, majd felhasználjuk, hogy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{A}$ (4).
Például a fenti függvényben összevonható az első két tag:

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} \cdot (\overline{\mathbf{B}}+\mathbf{B}) = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{E} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}}\ , \qquad (19b)$$

és az utolsó két tag:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \cdot (\overline{\mathbf{C}}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\ . \qquad (19c)$$

Ezeket beírva az eredeti függvénybe

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\ . \qquad (19d)$$

Itt már csak egy közös tényezőt találunk a második és a harmadik tagban:

$$\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{B}). \qquad (19e)$$

A zárójelben levő kifejezés a (17c)-nek megfelelően $\mathbf{B} + \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{B} + \overline{\mathbf{C}}$, tehát

$$\mathbf{A} \cdot (\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}. \qquad (19f)$$

Ezt visszahelyettesítve a (19d)-be

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\ . \qquad (19g)$$

Most az első két tagot vonhatjuk össze:

$$\mathbf{Y} = (\overline{\mathbf{A}}+\mathbf{A}) \cdot \overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\ ,$$

tehát

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\ . \qquad (19h)$$

Ez a függvény legegyszerűbb alakja.

A (19d) alakból máshogy is el lehet jutni a (19g) alakra, ha felhasználjuk azt, hogy $\mathbf{A}+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (6a), vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{A}+\mathbf{A}$, ami azt jelenti, hogy <u>**egy tagot többször is felhasználhatunk az egyszerűsítés során**</u>. A (19d)-ben az egyetlen háromtényezős tag az $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}}$ tag, ez összevonható a (19a)-ban levő $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}}$ taggal, ezért azt a tagot leírjuk még egyszer:

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,, \tag{19d'}$$

illetve ezt már a (19a) alakban is megtehetjük:

$$\mathbf{Y} = [\,\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}}\,] + [\,\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}}\,] + [\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\,]. \tag{19a'}$$

Mivel

$$\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{C}}\,, \tag{19i}$$

ezért

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,. \tag{19g}$$

Nézzünk egy másik lehetőséget arra, hogy hogyan haladhatunk tovább a (19d) alakból. Megtehetjük azt is, hogy az első és a második tagból emelünk ki:

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} = (\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}})\cdot\overline{\mathbf{C}}\,, \tag{19j}$$

ahol a zárójelben levő rész (17d) szerint $\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$, tehát

$$(\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}})\cdot\overline{\mathbf{C}} = (\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}})\cdot\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}}\,. \tag{19k}$$

Ezt visszahelyettesítve a (19d)-be

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,. \tag{19l}$$

Ebből az alakból már nem tudunk olyan kiemelést csinálni, amiből egyszerűsítés lesz.
Ugyanerre az alakra jutunk úgy is, ha a (19d)-ben levő $\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}}$ tag párjának a (19a)-ból az $\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}}$ tagot írjuk újra le:

$$\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \tag{19m}$$

Ebből az alakból már nehezebb eljutni a legegyszerűbb alakra. Az első két tagból kiemelhetjük $\overline{\mathbf{C}}$-ot

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} = (\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}})\cdot\overline{\mathbf{C}}\,. \tag{19n}$$

A zárójelben levő összeg a (18b) De Morgan-azonosság szerint

$$\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}\,,$$

ezt (19m)-be visszaírva

$$\mathbf{Y} = (\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}})\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\,. \tag{19o}$$

Az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ szorzatot egy egységnek tekintve alkalmazható a (17c) összefüggés, és megkapjuk a legegyszerűbb $\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{C}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ alakot.
Mivel a (19m) alakból elég nehéz kitalálni, hogy hogyan tudjuk tovább egyszerűsíteni, ezért nagy segítséget jelent az ún. **Karnaugh-tábla**. Az ilyen táblázatban a lehetséges összevonások könnyen felismerhetőek, mivel olyan a cellák elrendezése, hogy a szomszédos cellák csak egy tényezőben térnek el egymástól. Három változóval pl. így írhatjuk fel a táblát:

BC / A	0 0	0 1	1 1	1 0
0	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
1	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	$A\cdot B\cdot C$	$A\cdot B\cdot\overline{C}$

Az egyes cellákba itt azt írtuk be, hogy melyik tagnak felelnek meg, de a táblázatot a logikai függvény standard alakja alapján töltjük ki, úgy, hogy 1-est írunk azokba a cellákba, amelynek megfelelő tagok szerepelnek a standard alakban (azaz amik az igazságtáblában **Y**=**1**-et adnak).

A (19a) függvénynek megfelelő Karnaugh-tábla:

BC / A	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1			1
1	1		1	1

A szomszédos cellákban található **1**-esek összevonhatóak, a két tag helyett egyetlen tagot írunk ki, amely azokat a tényezőket tartalmazza, ami a két cellában közös volt.

Pl. a két szürkével jelölt cella az **A·B·C** és az **A·B·$\overline{\mathbf{C}}$** tagokat tartalmazza, ezek helyett az **A·B** tagot írjuk ki, ami azt jelenti, hogy **A** = **1** és **B** = **1** esetén **C** értékétől függetlenül igaz lesz a kifejezés.

B C / **A**	**0 0**	**0 1**	**1 1**	**1 0**	
0	1			1	
1	1		1	1	→ **A·B**

Nézzünk további összevonásokat:

B C / **A**	**0 0**	**0 1**	**1 1**	**1 0**
0	1			1
1	1		1	1
	↓ **$\overline{\mathbf{B}}$·$\overline{\mathbf{C}}$**			↓ **B·$\overline{\mathbf{C}}$**

Vagy ezt a kétszer két cellát összevonhatjuk máshogy is, ugyanis az első és a negyedik oszlop cellái is szomszédosak (azok is csak egy tényezőben különböznek):

B C / **A**	**0 0**	**0 1**	**1 1**	**1 0**	
0	1			1	→ **$\overline{\mathbf{A}}$·$\overline{\mathbf{C}}$**
1	1		1	1	→ **A·$\overline{\mathbf{C}}$**

De hogy lesz ebből a négy cellából a legegyszerűbb alak? Úgy, hogy a négy cellát egyszerre is összevonhatjuk, mert ezeknek a celláknak közös tényezője a **$\overline{\mathbf{C}}$** (vagyis **A** és **B** értékétől függetlenül **1**-et adnak ezek a tagok akkor, ha **C**=**0**).
Hasonlóan az algebrai egyszerűsítéshez itt is felhasználhatunk egy tagot többször is, pl. az **A·B·$\overline{\mathbf{C}}$** tag összevonható akár a felette levő **$\overline{\mathbf{A}}$·B·$\overline{\mathbf{C}}$** taggal, akár az első oszlopban lévő **A·$\overline{\mathbf{B}}$·$\overline{\mathbf{C}}$** taggal.

Tehát a (19a) függvénynek megfelelő Karnaugh-táblát vizsgálva
ez a négy cella **$\overline{\mathbf{C}}$**-ot ad:

B C / **A**	**0 0**	**0 1**	**1 1**	**1 0**
0	1			1
1	1		1	1

és az ötödik cellában levő **1**-es pedig összevonható a tőle jobbra levő cellával **A·B**-vé, vagyis a függvény legegyszerűbb alakja

Y = **$\overline{\mathbf{C}}$** + **A·B** . (19h)

Előfordulhat olyan függvény is, amiben van olyan tag, ami semmivel nem vonható össze, ilyenkor az megmarad olyan háromtényezős alakban, ahogy a standard alakban szerepelt, pl.

B C / **A**	**0 0**	**0 1**	**1 1**	**1 0**
0	1			1
1		1		1

legegyszerűbb alakja **Y** = **B·$\overline{\mathbf{C}}$** + **$\overline{\mathbf{A}}$·$\overline{\mathbf{C}}$** + **A·$\overline{\mathbf{B}}$·C** .

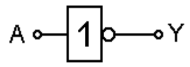
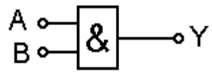
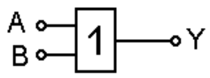
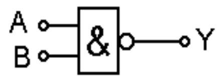
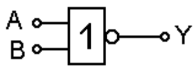
A logikai áramkörök alapelemei

A logikai műveleteket elektromos kapcsolásokkal reprezentálhatjuk. A logikai áramkörök bemenetei felelnek meg az **A**, **B**, **...** független változóknak és a kimenet az **Y** eredménynek. Az alapvető műveleteknek megfelelő elemek, az ún. kapuáramkörök kombinálásával tetszőleges logikai függvényt megvalósíthatunk. A logikai változók **0** értékének néhány tized V-os, az **1** értéknek néhány V-os feszültség felel meg. A kapuáramköröket félvezető diódákból és tranzisztorokból építik fel, és leginkább integrált áramkörökként (IC) forgalmazzák. Az IC-k közös tokban több azonos típusú kapuáramkört is tartalmaznak. Léteznek 2-nél több bemenetű kapuk is.

Technológiai okokból AND és OR kapuk helyett inkább NAND és NOR kapukat gyártanak. A tagadó kapuk kimenetén az OR ill. AND művelet eredményének a negáltja jelenik meg. A NOR és a NAND műveletek igazságtáblázata:

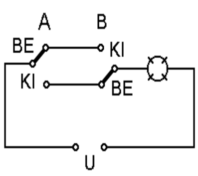
NOR			NAND		
A	**B**	$\mathbf{Y = \overline{A + B}}$	**A**	**B**	$\mathbf{Y = \overline{A \cdot B}}$
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**

A kapuáramkörök fajtái, elnevezésük és jelölésük az alábbi táblázatban látható:

kapu elnevezése	függvény	jelölés	más szabvány
NOT (inverter)	$\mathbf{Y = \overline{A}}$		
AND (és)	$\mathbf{Y = A \cdot B}$		
OR (vagy)	$\mathbf{Y = A + B}$		
NAND (tagadó és)	$\mathbf{Y = \overline{A \cdot B}}$		
NOR (tagadó vagy)	$\mathbf{Y = \overline{A + B}}$		

Példa:

A folyosói világításnak a folyosó mindkét végén van kapcsolója,
bármelyik végén fel tudjuk kapcsolni a lámpát,
ill. ha ég a lámpa, akkor le tudjuk kapcsolni (alternatív kapcsoló).
Írjuk ezt le a logikai algebra nyelvén!
Hogyan valósítható meg a kapcsolás kapuáramkörökkel?
A megvalósításhoz csak NAND és NOR kapukat és invertereket használjunk.



Kétállású kapcsolókkal így nézne ki a kapcsolás

Megoldás:

Legyen az **A** esemény az, hogy az "A" kapcsoló be van kapcsolva, a **B** esemény az, hogy a "B" kapcsoló be van kapcsolva, az **Y** esemény pedig az, hogy ég a lámpa.

Legyen a két kapcsoló alaphelyzetben "KI" állapotban és ekkor a lámpa ne égjen.

Töltsük ki a függvény igazságtáblázatát:

induláskor **A** = **0** és **B** = **0** esetén **Y** = **0** ;

bármelyik kapcsoló bekapcsolásakor a lámpa kigyullad,

tehát **A** = **1** és **B** = **0** , illetve **A** = **0** és **B** = **1** esetén **Y** = **1** ;

majd a lámpa ismét elalszik, azaz **Y** = **0**,

ha bármelyik kapcsoló állapotát megváltoztatjuk:

akár valamelyik kikapcsolt kapcsolót bekapcsoljuk, tehát **A** = **1** és **B** = **1** esetén,

akár valamelyik bekapcsolt kapcsolót kikapcsoljuk, ez az **A** = **0** és **B** = **0** kiinduló helyzet.

A	B	Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Írjuk fel a függvény standard alakját:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B} \qquad (20a)$$

Ezt a függvényt nem lehet egyszerűsíteni. Ebben az alakban a függvény megvalósításához szükségünk lenne két AND és egy OR kapura, de csak tagadó (NAND és NOR) kapukat használhatunk fel. Ezért át kell alakítani a (20a) függvényt a De Morgan-azonosságok (18) alkalmazásával úgy, hogy csak olyan műveletek legyenek benne, amiknek az eredménye negálva van (minden műveleti jel fölött van vonal). Az átalakítás első lépéseként duplán negáljuk az egész kifejezést (8).

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B} = \overline{\overline{\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}}} \qquad (20b)$$

A (18a) szerint

$$\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{B}} \qquad (18a)$$

Az **A** és **B** helyén bonyolultabb kifejezés is állhat. A (20b) függvényből nézzük ezt a részt:

$$\overline{\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}},$$

ez átalakítható a De Morgan-azonosság szerint:

$$\overline{\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}}} + \overline{\bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}}\,. \qquad (20c)$$

Tehát az átalakított függvényalak

$$\mathbf{Y} = \overline{\overline{\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}}}\cdot\overline{\bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}}}\,. \qquad (20d)$$

Ez a függvény két inverterrel és három NAND kapuval – összesen 5 kapuval – megvalósítható.

További átalakításokkal azonban olyan alakra tudjuk hozni, amihez kevesebb kapu is elég:

$$\mathbf{Y} = \overline{\overline{\mathbf{A}\cdot\bar{\mathbf{B}}}\cdot\overline{\bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}}} = \overline{(\bar{\mathbf{A}}+\bar{\bar{\mathbf{B}}})\cdot(\bar{\bar{\mathbf{A}}}+\bar{\mathbf{B}})} = \overline{(\bar{\mathbf{A}}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\bar{\mathbf{B}})} =$$

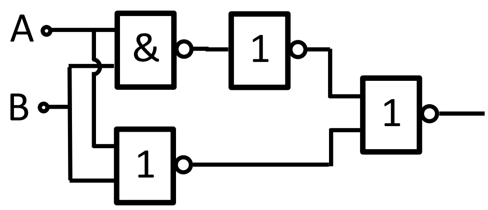
$$= \overline{\bar{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\bar{\mathbf{B}}} = \overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{B}}} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}} + \overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}}\,. \qquad (20e)$$

[Ezt az alakot egyébként gyorsabban megkapjuk, ha azt írjuk fel, hogy **Y** mikor hamis:

$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{B}}$, ezt átalakítjuk, majd mindkét oldalt negáljuk:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{B}} = \overline{\overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}} + \overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \quad\rightarrow\quad \mathbf{Y} = \overline{\overline{\overline{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}} + \overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}}\;.\,]$$

A (20e) függvényt egy inverterrel, egy NAND és két NOR kapuval – összesen 4 kapuval – valósíthatjuk meg:



MÉRÉSI FELADAT

Eszközök:

- panel a logikai áramkör megvalósításához, benne
- kapuáramkörök NAND, NOR és INV kapukkal (7402, 7420, 7400 és 7404 számú integrált áramkörök)
- közös egyenfeszültségű tápegység elosztóval
- mérőzsinórok

Feladat:

Az oktató által adott szöveges feladatnak megfelelő logikai algebrai függvény felírása és megvalósítása NAND, NOR és inverter kapukkal:

1. Meghatározzuk a feladat igazságtáblázatát, és ennek alapján …
2. … felírjuk a logikai algebrai függvény standard alakját.
3. Egyszerűsítjük és …
4. … a De Morgan - azonosságok alkalmazásával átalakítjuk úgy, hogy minél kevesebb NAND és NOR kapuval, ill. inverterrel megvalósítható legyen a feladatnak megfelelő áramkör.
5. Megrajzoljuk a kapcsolási rajzot, és …
6. … összeállítjuk a panelon a logikai áramkört.
7. Csatlakoztathatjuk a panelt a tápegységhez.
8. Az igazságtáblázat minden sorát végigpróbálva ellenőrizzük, hogy az áramkör valóban a kiadott feladatnak megfelelően működik-e.
9. Az áramkört ellenőriztetjük az oktatóval.

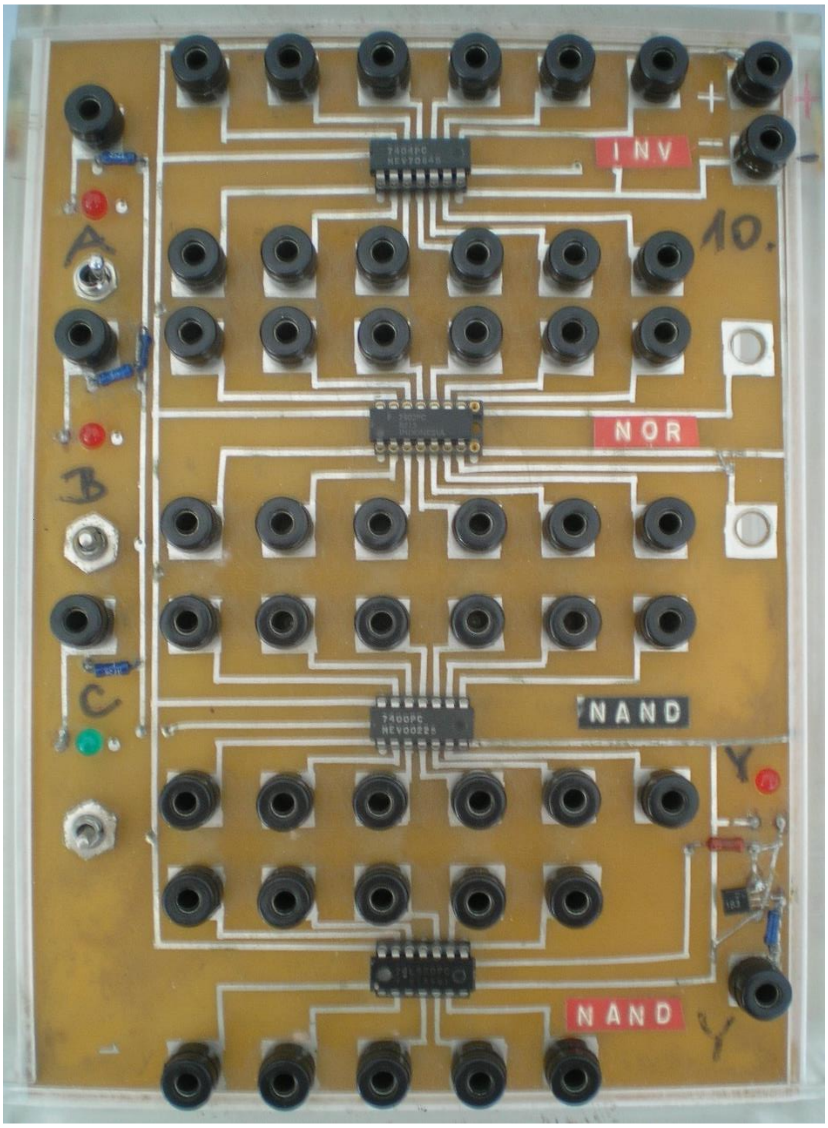
Az órai feladat elvégzése 4 pontot ér, a jegyzőkönyvi feladat az órai munka letisztázása 8 pontért.

A JEGYZŐKÖNYVBEN BEADANDÓ:

- az oktató által kiosztott feladat;
- az igazságtáblázat;
- a függvény standard alakja;
- az egyszerűsítés lépései (algebrai módon vagy Karnaugh-táblával);
- a függvény legegyszerűbb alakja;
- az átalakítás lépései a De Morgan - azonosságok alkalmazásával;
- a csak tagadó kapukat tartalmazó megvalósítható függvényalak;
- a kapcsolási rajz.

Ezen a weboldalon lehet játszani logikai áramkörök összeszerelésével:

https://academo.org/demos/logic-gate-simulator/



***1. ábra**. Panel a logikai áramkör megvalósításához*

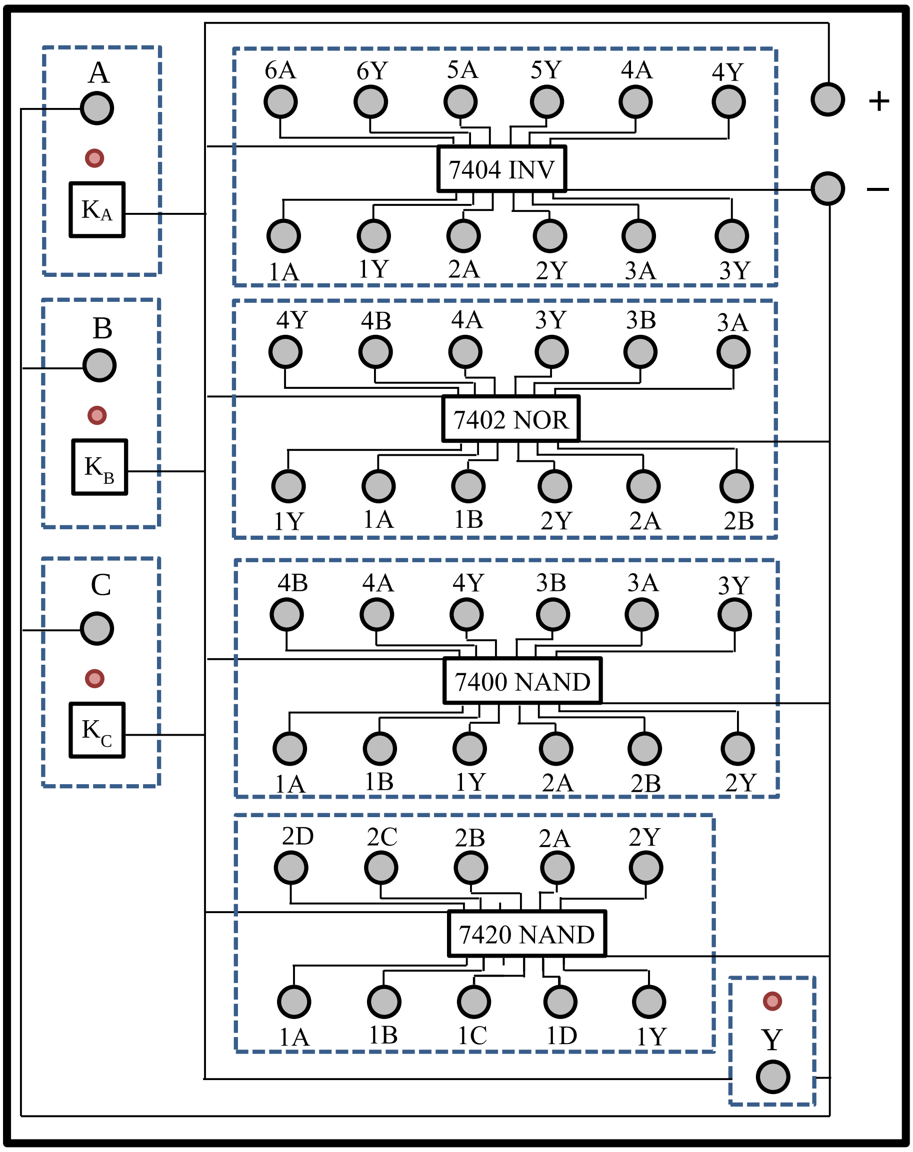
A logikai áramkört az ábrán látható panelon. A panelon négy IC foglalatot találunk, ezekbe vannak behelyezve az IC-k, melyek a következő kapukat tartalmazzák:

7404: 6 db inverter
7402: 4 db kétbemenetű NOR
7400: 4 db kétbemenetű NAND
7420: 2 db négybemenetű NAND (ezek használhatók kevesebb bemenettel is)

A kapubemenetekhez és -kimenetekhez az IC-foglalat felett és alatt banánhüvelyek csatlakoznak. (Minden IC-hez két tápfeszültség-vezeték is csatlakozik a nyomtatott áramköri lapon, ezekhez nem tartozik banánhüvely).

A panel jobb felső sarkában lévő + ill. – jelű banánhüvelyekhez csatlakoztathatjuk az egyenfeszültségű tápegységet.

A logikai áramkör bemenő jeleit a panel bal oldalán lévő kapcsolókkal állíthatjuk. A kapcsoló bekapcsolt állapotát (azt, hogy a megfelelő logikai változó értéke **1**) egy LED kigyulladása jelzi. A kapcsolók melletti banánhüvelyeket mérőzsinórral csatlakoztatjuk a megfelelő IC-bemenetekhez, azok kimenetét az összeépítendő kapcsolásnak megfelelően a további IC bemenetekhez, végül a logikai áramkör kimenetét a jobb alsó sarokban levő „Y” jelű banánhüvelyhez. Ha a kimenőjel logikai "igen"-nek felel meg (a logikai változó értéke **1**), a kimenethez csatlakozó LED égni fog.



2. ábra. A logikai kapuk be- és kimenetei.
A kimeneteket Y jelöli, a bemeneteket A, B, …

BEUGRÓ KIS ZÁRTHELYI

MINIMUMKÉRDÉSEK: az (1) – (18) összefüggések.

GYAKORLÓ FELADATOK A BEUGRÓ ZH-RA VALÓ FELKÉSZÜLÉSHEZ:

Hozza az alábbi logikai függvényeket a legegyszerűbb alakra!

		megoldások
a)	$Y = \bar{A}\,B + \bar{C} + A\,B\,C + \bar{A}$	$Y = \bar{A} + B + \bar{C}$
b)	$Y = \bar{A}\,B\,C + \bar{B} + A\,C + \bar{A}$	$Y = \bar{A} + \bar{B} + C$
c)	$Y = \bar{A}\,C\,B + \bar{B}\,C\,\bar{A}\,\bar{B} + B\,\bar{A}\,\bar{B}\,C + B\,\bar{A}\,\bar{C}\,B + \bar{B}\,\bar{C}\,A$	$Y = \bar{A}\,B + \bar{A}\,C + A\,\bar{B}\,\bar{C}$
d)	$Y = B\,\bar{A}\,C + \bar{C}\,\bar{B}\,\bar{A} + \bar{C}\,\bar{B}\,A\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{A}\,C\,B + \bar{B}\,C\,A$	$Y = A\,\bar{B} + \bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,C$
e)	$Y = \bar{B}\,C\,A + C\,\bar{B}\,A\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,\bar{C}\,A + C\,A\,B + \bar{B}\,A\,\bar{B}\,C$	$Y = A\,C$
f)	$Y = B\,\bar{A}\,C + \bar{C}\,\bar{A}\,B\,\bar{C} + C\,\bar{A}\,B\,\bar{C} + C\,A\,B + \bar{A}\,\bar{B}\,C$	$Y = \bar{A}\,B + \bar{A}\,C + B\,C$
g)	$Y = C\,\bar{A}\,\bar{B} + C\,\bar{A}\,B\,\bar{C} + C\,\bar{A}\,B\,C + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{C}\,A$	$Y = \bar{A}\,C + \bar{B}\,\bar{C}$
h)	$Y = A\,B\,C + B\,\bar{A}\,B\,C + \bar{B}\,\bar{A}\,B\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,B\,\bar{C}$	$Y = \bar{A}\,\bar{C} + B\,C$
i)	$Y = C\,\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{A} + C\,\bar{A}\,B + A\,B\,C + \bar{B}\,\bar{A}\,\bar{C} + B\,\bar{C}\,\bar{A}\,\bar{C}$	$Y = \bar{A} + B\,C$
j)	$Y = C\,\bar{B}\,\bar{A} + \bar{A}\,B\,C + \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{C}\,A\,\bar{B} + \bar{C}\,B\,A$	$Y = A\,\bar{C} + \bar{A}\,C + \bar{A}\,\bar{B}$ vagy $Y = A\,\bar{C} + \bar{A}\,C + \bar{B}\,\bar{C}$
k)	$Y = C\,\bar{B}\,\bar{A} + \bar{C}\,A\,\bar{B}\,\bar{C} + C\,\bar{A}\,B\,\bar{C} + A\,C\,\bar{B}\,C + B\,\bar{A}\,C$	$Y = A\,\bar{B} + \bar{A}\,C$
l)	$Y = C\,\bar{A}\,\bar{B} + C\,\bar{A}\,B\,C + A\,C\,\bar{B}\,C + A\,\bar{C}\,B\,C + A\,C\,B\,C$	$Y = C$
m)	$Y = \bar{A}\,B\,C + \overline{A + B} + \overline{A + C}$	$Y = \bar{A}$
n)	$Y = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \overline{\bar{A} + B} + \overline{B + \bar{C}}$	$Y = \bar{B}$