

## 5. VÁLTAKOZÓ ÁRAM

A gyakorlat célja a soros rezgőkör segítségével megismerkedni a váltóáramú hálózatokra jellemző áram- és feszültségviszonyokkal, valamint a rezonancia jelenségével, amely sokszor előfordul a mérnöki gyakorlatban (mechanikus rezgések<sup>1</sup> gépeken, spektroszkópiai módszerek, adatátvitel).

### Előismeret:

- Ohm-törvény;
- kondenzátor feszültsége, kapacitása;
- önindukciós tekercs feszültsége, önindukciós együtthatója;
- Kirchhoff-törvények;
- harmonikus függvények;
- komplex számok.

## ELMÉLET

### 1. VÁLTÓÁRAMÚ HÁLÓZATSZÁMÍTÁS

Ha a feszültség, illetve az áramerősség harmonikus függvénye az időnek, azaz

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \quad \text{illetve} \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I), \quad (1)$$

akkor **váltófeszültségről**, illetve **váltóáramról** beszélünk. Itt

$U_0$  ill.  $I_0$  a feszültség ill. az áram amplitúdója;

$\omega t + \varphi_U$  ill.  $\omega t + \varphi_I$  a fázis;

$\omega$  a körfrekvencia [ $s^{-1}$ ];

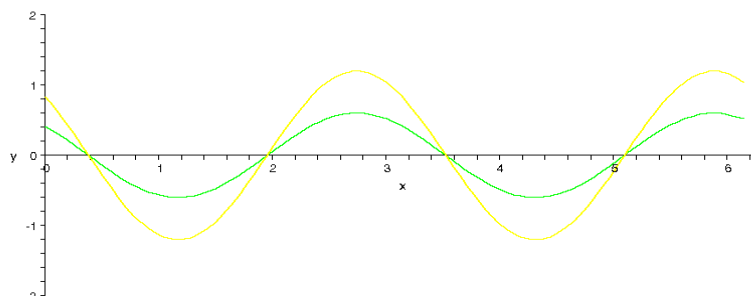
$\omega = 2\pi\nu$ , ahol  $\nu$  a frekvencia [Hz], és  $\nu = 1/T$ , ahol  $T$  a periódusidő [s];

$\varphi_U$  ill.  $\varphi_I$  a fázisállandó vagy kezdőfázis [rad].

### 1.1. Ellenállás, kondenzátor és önindukciós tekercs váltóáramú hálózatban

Egy tetszőleges R **ellenálláson** időfüggő áram ill. feszültség esetén is érvényes az Ohm-törvény, tehát a feszültség minden pillanatban arányos a pillanatnyi áramerősséggel:

$$U_R(t) = R I(t) \quad (2)$$



**1. ábra.** Áram és feszültség ohmos ellenálláson.  
Zöld:  $I(t)$ , sárga:  $U_R(t)$

<sup>1</sup> Rezonancia mechanikai rezgésnél: <https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k>

Kondenzátor és önindukciós tekercs esetén azonban nem ilyen egyszerű  $I(t)$  és  $U(t)$  viszonya, a feszültség és az áram hányadosa időben nem állandó.

A **kondenzátor** feszültsége a rajta lévő töltéssel arányos:

$$U_C = \frac{1}{C} Q.$$

Itt  $C$  a kondenzátor kapacitása, egysége a Farad [F].

Változó áram esetén változik a kondenzátoron levő töltés értéke, és azzal arányosan változik a kondenzátoron eső feszültség:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} Q(t).$$

Mivel az áram az adott felületen átmenő töltésmennyiség deriváltja, ezért a töltés átfolyó áram integrálja:

$$I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow Q(t) = \int I(t) dt \rightarrow U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_C(t) dt. \quad (3)$$

Hogyan függ a kondenzátoron eső feszültség az időtől, ha a kondenzátoron átfolyó áram harmonikus függvénye az időnek? Írjuk fel az áramot  $I_C(t) = I_0 \cos(\omega t)$  alakban ( $\varphi_U=0$  választással) és integráljunk:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I_0 \cos(\omega t) dt = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t).$$

Érdekes átírni a  $\sin(\omega t)$ -t  $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$  alakra:

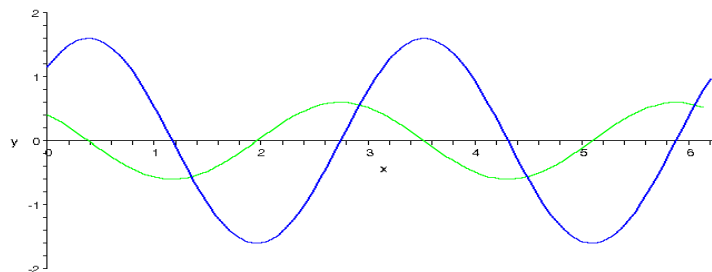
$$U_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \quad (4)$$

Látható, hogy a **kondenzátoron eső feszültség** olyan harmonikus függvénye az időnek, melynek frekvenciája megegyezik az áraméval, de a feszültség

**$\pi/2$  fázissal késik az áramerősséghez képest,**

és **amplitúdója**

$$U_{C,0} = \frac{I_0}{\omega C}.$$



**2. ábra.** Áram és feszültség kondenzátoron.

Zöld:  $I_C(t)$ , kék:  $U_C(t)$

**Önindukciós tekercs:** Ha a tekercsben folyó áram megváltozik, akkor az általa körülhatárolt területen a  $\Phi$  mágneses fluxus is megváltozik, és a tekercsben feszültség indukálódik. Ez az indukált feszültség a mágneses fluxus változási sebességével, a fluxus pedig az áramerősséggel arányos:

$$U_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L \frac{dI_L(t)}{dt}. \quad (5)$$

Itt  $L$  a tekercs önindukciós együtthatója, egysége a Henry [H].

$I_C(t) = I_0 \cos \omega t$  alakban felírt váltóáram esetén a tekercsen a feszültség

$$U_L(t) = L \frac{d I_0 \cos \omega t}{dt} = -I_0 \omega L \sin \omega t.$$

A  $-\sin(\omega t)$ -t átírható  $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$  alakra:

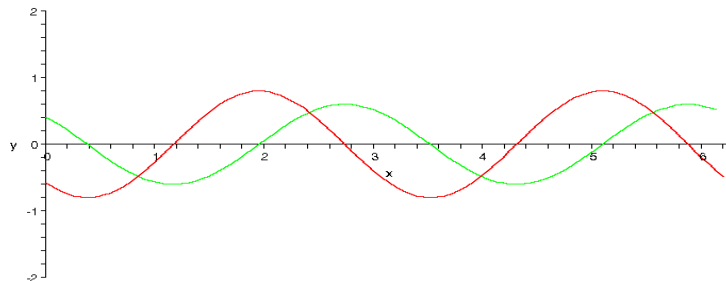
$$U_L(t) = I_0 \omega L \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

(6)

Látható, hogy az **önindukciós tekercsen eső feszültség** olyan harmonikus függvénye az időnek, melynek frekvenciája megegyezik az áraméval, de a feszültség

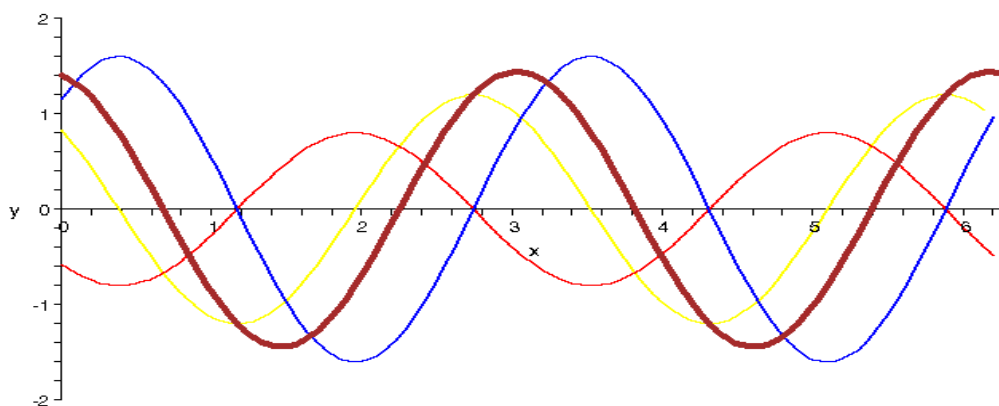
**$\pi/2$  fázissal siet az áramerősséghez képest,**  
és **amplitúdója**

$$U_{L,0} = I_0 \omega L.$$



**3. ábra.** Áram és feszültség önindukciós tekercsen.  
Zöld:  $I_L(t)$ , piros:  $U_L(t)$

Képzeljük el, hogy sorosan kötünk egy ellenállást, egy kondenzátort és egy tekercset. Mivel sorosan vannak kötve, tudjuk, hogy ugyanaz az áram folyik át rajtuk, és a fentiek szerint ismerjük a rajtuk eső feszültségeket is. A három áramköri elemen eső teljes feszültség az egyes feszültségek ( $U_R$ ,  $U_C$ ,  $U_L$ ) összege. Ez az összeadás azonban a fáziskülönbségek miatt nem egyszerű, az eredő feszültség amplitúdója és fázisa elég hosszadalmas számításokkal határozható meg. A 4. ábra mutatja a fenti három áramköri elemen eső feszültséget és az összegüket:



**4. ábra.** Sorosan kötött ellenállás, kondenzátor és tekercs feszültsége,  
és a három elemen eső feszültség összege.

Sárga:  $U_R(t)$ , kék:  $U_C(t)$ , piros:  $U_L(t)$ , barna:  $U_{RLC}(t)$  eredő feszültség.

Mivel mind a kondenzátornál, mind a tekercsnél a feszültség és az áram hányadosa időben változik, ezért az egyenáramú hálózatoknál használt Kirchhoff-törvények (csomóponti és huroktörvény) csak a *pillanatnyi* értékekre alkalmazhatók, az amplitúdókra nem. Az eredő áramok ill. feszültségek amplitúdóját a rész-áramok ill. -feszültségek amplitúdójából csak a *fázisok ismeretében* lehet meghatározni. Formális hasonlóság hozható létre a váltó- és egyenáramú hálózatszámítás között az alábbi módszerrel.

## 1.2. Komplex mennyiségek bevezetése

Egy komplex számot megadhatunk az R valós és az X képzetes részével:

$$\tilde{Z} = R + iX,$$

vagy a Z abszolút értékével és a  $\varphi$  fázisával:

$$\tilde{Z} = Z e^{i\varphi} \quad (\text{Euler alak}).$$

A  $\varphi$  fázis a valós tengellyel bezárt szög.

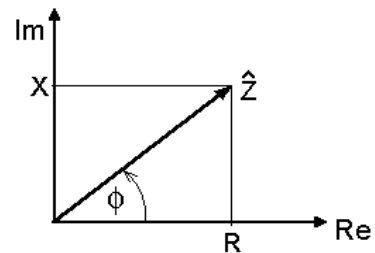
Az 5. ábráról látható, hogy

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = X/R \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = Z \cos \varphi \\ X = Z \sin \varphi \end{array} \right\},$$

vagyis  $\tilde{Z}$  felírható

$$\tilde{Z} = Z \cos \varphi + i Z \sin \varphi \quad \text{alakban is.}$$

Az Euler alakból kiolvasható, hogy komplex számok szorzásakor az abszolút értékek szorozódnak, és a fázisok összeadódnak.



5. ábra. Komplex mennyiség

Elvben feltételezhetjük, hogy a feszültség ill. az áramerősség komplex értékű függvénye az időnek:

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 e^{i(\omega t + \varphi_U)} \quad \text{ill.} \quad \tilde{I} = \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}. \quad (7)$$

A feszültség és az áram  $\omega$  szögsebességű forgó vektorok a komplex síkon. Bár ennek fizikai értelme nincs, mégis, ha vesszük  $\tilde{U}$  ill.  $\tilde{I}$  valós részét, az már a közönséges harmonikus időfüggés<sup>2</sup>:

$$\operatorname{Re}(\tilde{U}) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U), \quad \operatorname{Re}(\tilde{I}) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I). \quad (8)$$

A komplex feszültségekkel és áramokkal felírhatjuk az Ohm-törvényt és a kondenzátorra ill. az önindukciós tekercsre vonatkozó összefüggéseket. A feszültségek és áramok konstanssal való szorzását, differenciálását és integrálását elvégezhetjük a komplex függvényalakkal.

Írjuk fel az áramerősséget

$$\tilde{I} = \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}$$

alakban, és határozzuk meg (2), (3) és (5) mintájára a komplex feszültségeket az egyes áramköri elemeken:

$$\tilde{U}_R = R \cdot \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} = R \cdot \tilde{I} \quad (9)$$

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{C} \int \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{\tilde{I}_0}{i\omega} e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \frac{1}{\omega C i} \cdot \tilde{I}, \quad (10)$$

$$\tilde{U}_L = L \cdot \frac{d\tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}}{dt} = L \cdot \tilde{I}_0 \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \omega L i \cdot \tilde{I}. \quad (11)$$

Látható, hogy a komplex alakban már a kondenzátor és a tekercs esetében is a feszültség és az áram hányadosa is egy-egy időtől nem függő – viszont komplex – szám. Ezeket a hányadosokat **komplex impedanciáknak** nevezzük,  $\tilde{Z}$ -vel jelöljük, és velük a komplex feszültség és komplex áram közötti összefüggés az egyenáramú Ohm-törvényhez hasonló alakba írható:

$$\tilde{U} = \tilde{Z} \cdot \tilde{I}. \quad (12)$$

<sup>2</sup> [Ebben a videóban](#) szimuláció mutatja, ahogy a komplex síkon forgó vektorok vetületeként megkapjuk a feszültség és az áram harmonikus időfüggését, és ahogy a forgó vektorok közötti fáziskülönbség leírja az harmonikus függvények fázisának különbségét.

Az ellenállás, a kondenzátor és a tekercs impedanciáját a (9)–(11) képletekből olvashatjuk ki:

$$\tilde{Z}_R = R, \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega Ci} = -\frac{1}{\omega C}i, \quad \tilde{Z}_L = \omega Li \quad (13)$$

Az ellenállás:

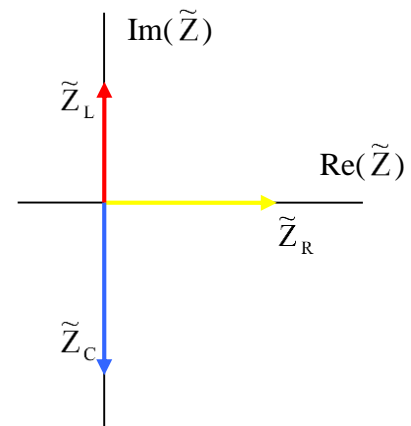
fázisa  $\varphi_R = 0$ ,  
nagysága  $R$ .

A kondenzátor:

fázisa  $\varphi_C = -\pi/2$ ,  
nagysága  $1/(\omega C)$ .

A tekercs:

fázisa  $\varphi_L = \pi/2$ ,  
nagysága  $\omega L$ .



**6. ábra.** Ellenállás, kondenzátor és tekercs komplex impedanciája.

A komplex mennyiségekkel a váltóáramú hálózatszámítás visszavezethető az egyenáramú hálózatszámításra, a Kirchhoff-törvények érvényesek maradnak a komplex áramokkal és feszültségekkel felírva. A komplex alakkal elvégezhetjük a feszültségek és áramok összeadását, a komplex feszültségek ill. áramok valós része megadja az adott mennyiség időfüggését.

Ha ellenállásokból, tekercsekéből és kondenzátorokból tetszőleges kétpólust építünk, annak a két pólusán is arányos lesz a komplex feszültség a komplex árammal, mert ez az arányosság minden egyes elemen fennáll (a (12) összefüggés felírható ez egyes elemekre vagy azok eredőjére is). Egy kétpólus komplex feszültségének és áramának hányadosát a kétpólus **eredő komplex impedanciájának** nevezzük, ami az egyenáramú hálózatoknál megismert szabályok szerint számolható ki az egyes áramköri elemek komplex impedanciájából, azaz

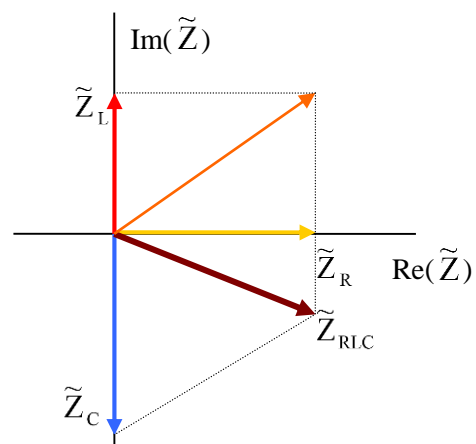
– soros kapcsolásnál a komplex impedanciák összeadódnak:

$$\tilde{Z}_e = \sum \tilde{Z}_i, \quad (14)$$

– párhuzamos kapcsolásnál az egyes impedanciák reciprokanak összege adja az eredő reciprokát:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_e} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i}. \quad (15)$$

Ez azt jelenti, hogy *soros kapcsolásnál* a komplex síkon az eredő impedancia az egyes impedanciáknak megfelelő vektorok eredőjének megszerkesztésével nyerhető:



**7. ábra.** Komplex impedanciák vektorábrája: sorosan kötött ellenállás, tekercs és kondenzátor eredő impedanciája.

Mivel tudjuk, hogy komplex számok szorzásánál az abszolút értékek szorzódnak, a fázisok pedig összeadódnak, a komplex mennyiségekkel felírt Ohm-törvényből (12) következik, hogy

– a feszültség amplitúdója az impedancia abszolút értékének és az áram amplitúdójának szorzata:

$$U_0 = Z \cdot I_0 ,$$

– a feszültség fázisa az impedancia és az áram fázisának összegével egyenlő:

$$\varphi_U = \varphi_Z + \varphi_I .$$

$\varphi_Z$  helyett általában röviden csak  $\varphi$ -t írunk. Tehát

$$U(t) = Z \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t + (\varphi + \varphi_I)) .$$

A komplex impedancia nagysága megadja a feszültség és az áram amplitúdójának hányadosát, a fázisa pedig a feszültség és az áram közötti fáziskülönbséget.

Ellenőrizhetjük, hogyan kapjuk vissza ellenállásra, kondenzátorra és tekercsre az 1.1. pontban levezetett összefüggéseket:

– Az ellenállás impedanciája  $\tilde{Z}_R = R$ . Ennek abszolút értéke  $R$ , így  $U_{R,0} = R I_0$ , és fázisa  $0$ , vagyis a feszültség és az áram azonos fázisban vannak.

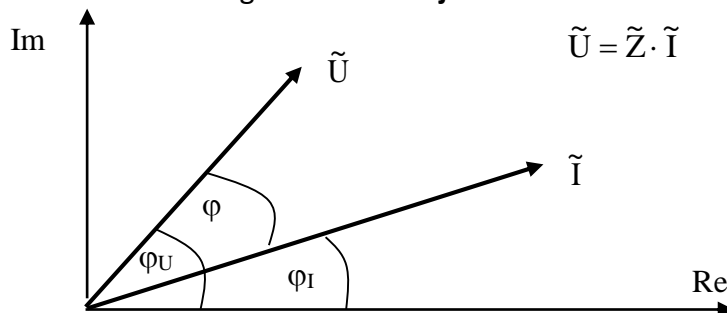
– A kondenzátor impedanciája  $\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C i} = -\frac{1}{\omega C} i$ . Ennek abszolút értéke  $1/(\omega C)$ , így

$U_{C,0} = I_0 / (\omega C)$ , és fázisa  $-\pi/2$ , vagyis a feszültség  $\pi/2$ -vel késik az áramhoz képest.

– A tekercs impedanciája  $\tilde{Z}_L = \omega L i$ . Ennek abszolút értéke  $\omega L$ , így  $U_{L,0} = \omega L I_0$ , és fázisa  $\pi/2$ , vagyis a feszültség  $\pi/2$ -vel siet az áramhoz képest.

Ezen elemek összekapcsolásával az eredő impedancia fázisa  $-\pi/2$  és  $\pi/2$  közötti érték lehet.

A komplex számsíkon ábrázolhatjuk nemcsak a komplex impedanciák, hanem a komplex váltóáramok és feszültségek **vektorábráját** is:



### **1.3. Váltóáramú teljesítmény számítása**

Periodikusan változó áram és feszültség esetén a pillanatnyi teljesítmény helyett az *átlagteljesítménynek* van gyakorlati jelentősége. Az átlagteljesítmény a pillanatnyi valós feszültség és a pillanatnyi áram szorzatának (a pillanatnyi teljesítménynek) az időátlag egy periódusra.

Számoljuk ki szinuszos időfüggés esetén az átlagteljesítményt. Legyen  $\varphi_I = 0$ , így  $\varphi_U = \varphi$ .

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \cos(\omega t + \varphi) \cdot I_0 \cos(\omega t) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi}{2} dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi .$$

Bevezetve az effektív értékeket

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} , I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

a teljesítmény az alábbi alakba írható:

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi .$$

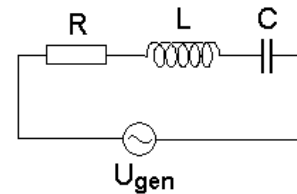
Az egyenáramú teljesítményhez képest tehát az az eltérés, hogy a teljesítményben megjelenik az impedancia fázisa. Ohmos ellenállásnál  $\cos \varphi = 1$ , kondenzátornál és tekercsnél viszont  $\cos \varphi = 0$ . Ez azt jelenti, hogy váltóáram esetén teljesítmény csak az ellenállásokon disszipálódik.

**1.4. Rezgőkörök, rezonancia**

Kondenzátort és tekercset is tartalmazó hálózat esetén gyakran előfordul, hogy az eredő impedanciájának abszolút értéke a váltóáram frekvenciájának függvényében szélsőértéken megy át. Ezekben a hálózatokban a szélsőérték frekvenciáján rezonancia lép fel. A két legnevezetesebb a soros és a párhuzamos rezgőkör. A mérés során csak a **soros rezgőkörrel** fogunk foglalkozni.

**Soros rezgőkör (soros RLC kör)**

Sorba kapcsolunk egy R ellenállást, egy L önindukciójú tekercset és egy C kapacitású kondenzátort, és egy  $\omega$  körfrekvenciájú (v frekvenciájú) váltóáramú generátorra kötjük.

**8. ábra.** Soros rezgőkör

A soros rezgőkör komplex impedanciája:

$$\tilde{Z}_{LRC} = R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C = R + \omega Li + \frac{1}{\omega Ci} = R + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) i \quad (16)$$

Az eredő impedancia az  $\omega$  körfrekvencia (a v frekvencia) függvénye.

Létezik egy  $\omega_0$  körfrekvencia, ahol  $\tilde{Z}_{LRC}$  képzetes része zérus:

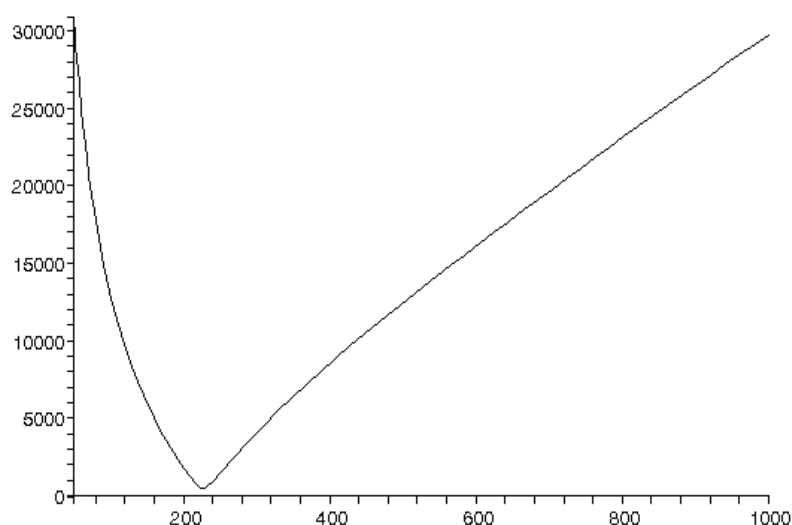
$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} ; \quad (17)$$

ekkor az impedancia valós, és az ohmos ellenállással, R-rel egyenlő:

$$\tilde{Z}(\omega_0) = R . \quad (18)$$

Ezen a körfrekvencián a (16) impedancia abszolút értékének,

$$Z_{LRC} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \text{ -nek minimuma van:} \quad (19)$$

**9. ábra.** Soros rezgőkör eredő impedanciájának frekvenciafüggése  
( $R = 500 \Omega$ ,  $L = 5 \text{ H}$ ,  $C = 0,1 \mu\text{F}$ ,  $\nu = 50 \dots 1000 \text{ Hz}$ )

Ez a körfrekvencia kifejezhető (17)-ből L és C értékével:

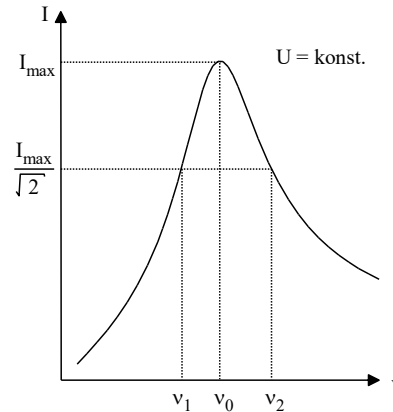
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \text{ ez a Thomson-formula.} \quad (20)$$

A

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (21)$$

frekvencia az áramkör rezonanciafrekvenciája.

**Konstans feszültség** mellett ennél a frekvenciánál az áram maximumon megy át, ezért a jelenséget *áramrezonanciának* nevezzük.



10. ábra. Soros rezgőkör rezonanciagörbéje

A rezonanciagörbe alakját, a rezonancia élességét a **Q jósági tényezővel** jellemezzük.

Q értéke annál nagyobb, minél szűkebb az a frekvenciatartomány, ahol jelentősen megnövekedett áramokat mérhetünk.

Soros rezgőkör esetén a Q jósági tényező a rezonanciafrekvenciához tartozó egyes reaktanciák (nem ohmikus impedanciák) és az ohmikus ellenállás hányadosa:

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (22)$$

(A harmadik alakot a Thomson-formula felhasználásával kaphatjuk.)

A jósági tényező értékét kiszámolhatjuk a rezonanciagörbéből is:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} \quad (23)$$

ahol  $\omega_1$  és  $\omega_2$  (ill.  $\nu_1$  és  $\nu_2$ ) az a két körfrekvencia (ill. frekvencia), amelynél az áramerősség a maximális érték  $\sqrt{2}$ -edére csökken (ld. 10. ábra) állandó feszültség mellett.

Hogy miért pont a maximális áram  $\sqrt{2}$ -edéhez tartozó frekvenciákat kell venni a Q kiszámításához? Ennek az az oka, hogy így lesz a kétféle képlettel számolva azonos a jósági tényező értéke. Ez az alábbi levezetéssel látható be. Az  $\omega_1$  és  $\omega_2$  körfrekvenciákon  $I_1 = I_2 = I_{\max}/\sqrt{2}$  és  $U_{LRC} = \text{konst.} \rightarrow Z_{LRC,1} = Z_{LRC,2} = \sqrt{2} Z_{LRC,0} = \sqrt{2} R$ , az eredő impedancia abszolút értéke  $\sqrt{2}$ -szerese a rezonanciafrekvenciához tartozó impedanciának, azaz R-nek. Ez azt jelenti, hogy ekkor az eredő reaktancia abszolút értéke megegyezik az ohmikus ellenállással:

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = R, \text{ vagyis } \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \text{ és } \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R.$$

A Thomson-formulából (20)  $1/C = \omega_0^2 L$ , ennek behelyettesítésével  $\frac{\omega_0^2 L}{\omega_1} - \omega_1 L = R$  és  $\omega_2 L - \frac{\omega_0^2 L}{\omega_2} = R$ ;

majd  $\omega_1$ -gyel ill.  $\omega_2$ -vel szorozva, és a két egyenletet összeadva

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)L = (\omega_1 + \omega_2)R, \text{ azaz } (\omega_2 - \omega_1)(\omega_1 + \omega_2)L = (\omega_1 + \omega_2)R \rightarrow (\omega_2 - \omega_1)L = R \rightarrow L/R = 1/(\omega_2 - \omega_1).$$

Ezt behelyettesítve a jósági tényezőre adott (22) formulába

$$Q = \omega_0 L/R = \omega_0 / (\omega_2 - \omega_1), \text{ tehát beláttuk, amit akartunk.}$$

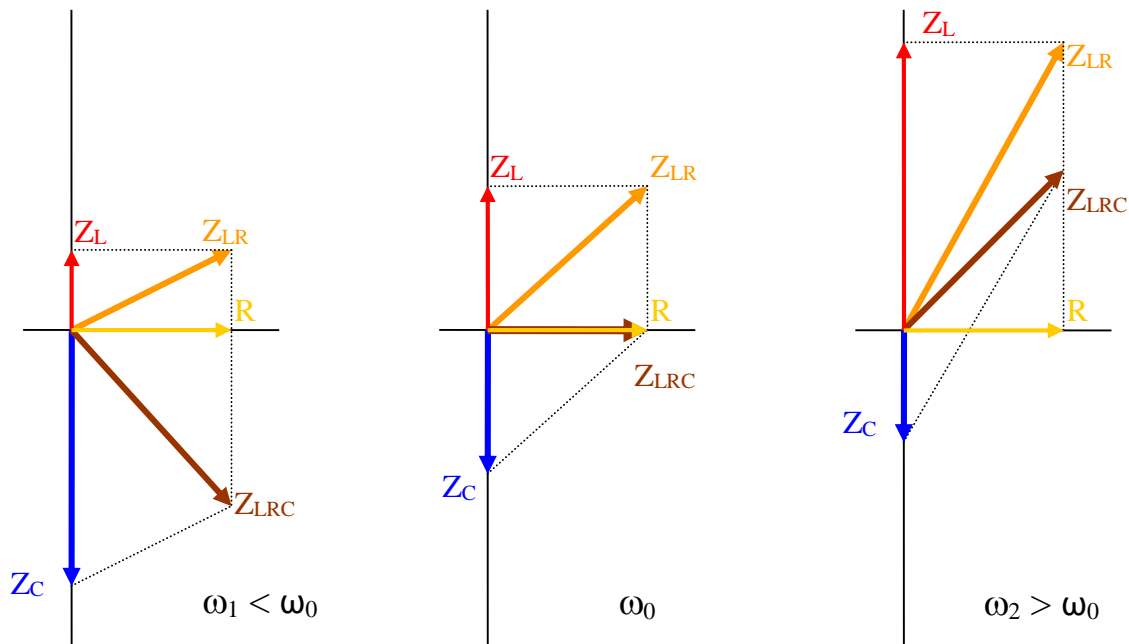
Az  $\omega_1$  ill.  $\omega_2$  körfrekvenciákon a rezgőkör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián felvett maximális teljesítménynek éppen a fele:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = I(\omega_1)^2 \cdot R = I(\omega_2)^2 \cdot R = \left( \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 R = \frac{I_{\max}^2 R}{2} = \frac{P_{\max}}{2}.$$



### A soros rezgőkör áramköri elemeinek komplex impedanciája a (kör)frekvencia függvényében

A 11. ábrán látjuk, hogyan változnak az egyes impedanciák egy soros áramkörben, ahogy nő a rákapcsolt feszültség (kör)frekvenciája. Az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor impedanciájának megfelelő komplex vektorok összegeként megkapjuk az eredő impedanciát.



**11. ábra.** Kondenzátor, reális tekercs és soros eredőjük impedanciája 3 különböző – egyre nagyobb – körfrekvencián

#### Reális tekercs

Az olyan önindukciós tekercset, amelynek ohmikus ellenállása is van, *reális* tekercsnek nevezzük. Ennek impedanciája

$$\tilde{Z}_{LR} = R + \omega Li. \quad (24)$$

A mérés során ilyet használunk, ezért a 11. ábrán ezt a komplex impedanciát is feltüntettük.

**JEGYZŐKÖNYV BEVEZETÉS**

a mérés elvégzésének tényleges dátuma	az együtt dolgozó hallgatók neve	csoporszá szám
<b>5. VÁLTÓÁRAMÚ MÉRÉSEK</b>	a mérésvezető neve	

**1. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének mérése**

Rajzolja le az áramkör kapcsolási rajzát és nevezze meg az egyes áramköri elemeket.

Mi a mérés célja? Milyen mennyiséget mérünk milyen mennyiség függvényében?

Írja le a mérés menetét!

Milyen mennyiségek lesznek kiszámolva a mérési adatokból?

**2. Soros rezgőkör áramköri jellemzőinek mérése**

Rajzolja le az áramkör kapcsolási rajzát a voltmérő háromféle bekötésével.

Írja le a mérés menetét.

Mi a mérés célja, milyen mennyiségek lesznek kiszámolva a mérési adatokból?

## MÉRÉSI FELADATOK

### A szükséges eszközök:

**Tekercs**   $L, R_L$

Vasmagos tekercs, ami reális tekercsként viselkedik, azaz van ohmikus ellenállása is. Az ohmikus ellenállása két részből tevődik össze:

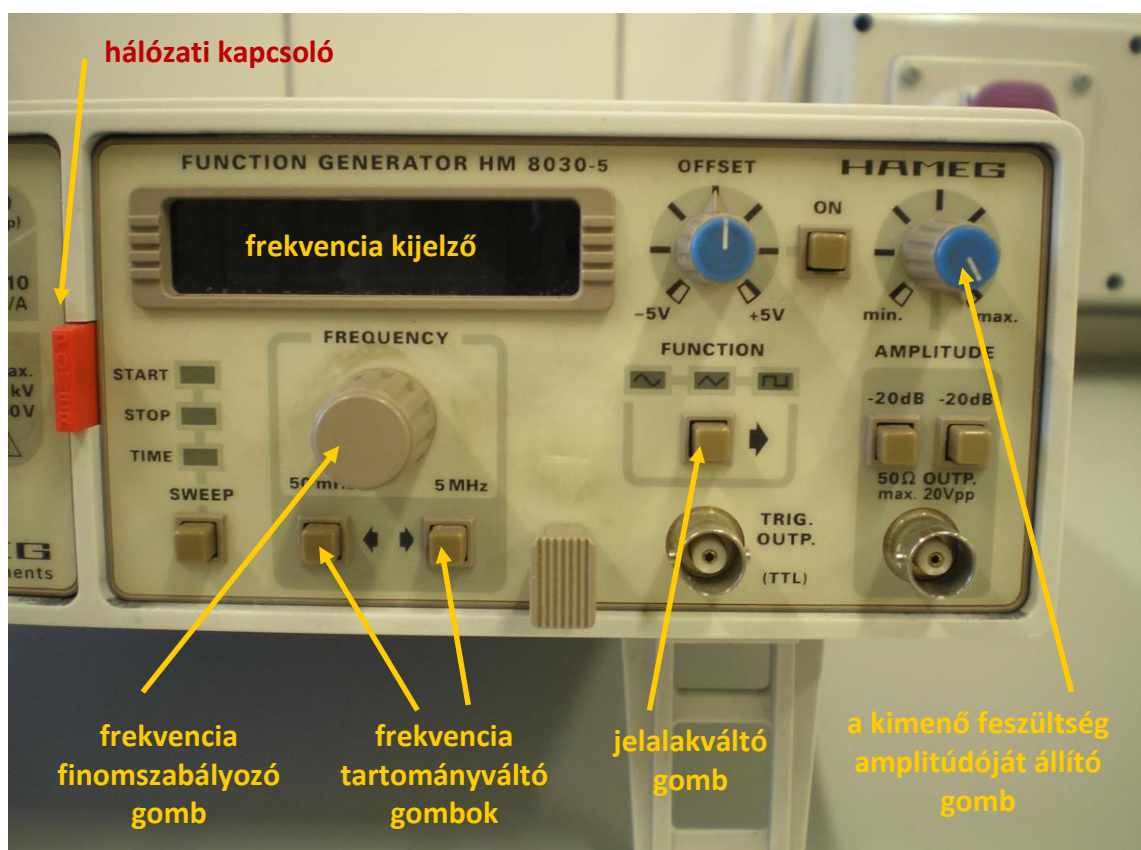
- a *rézvesztéséből*, vagyis a tekercset alkotó rézhuzal ellenállásából (néhányszor tíz  $\Omega$ ), és
- a *vasvesztéséből*, ami abból származik, hogy a váltóárammal átjárt tekercs vasmagja melegszik amiatt, hogy a változó elektromágneses térben örvényáramok jönnek létre benne. Ez az energiadisszipáció hasonló az ellenállásokon disszipálódó Joule-hőhöz, ezért modellezhető ohmikus ellenállással. A vasvesztés nagysága függ többek között a vasmag anyagi minőségétől, geometriai elrendezésétől, a frekvenciától és az áramerősségtől; a nagyságrendje fél k $\Omega$ .

**Kondenzátor**   $C$

Jó közelítéssel ideálisnak tekinthető, azaz nincs ohmikus ellenállása.

**Függvénygenerátor**   $U_{gen}$

Különböző jelalakú és frekvenciájú váltakozó feszültség előállítására alkalmas generátor. Amikor szinuszos kimenetet használunk, hanggenerátorként szokás rá hivatkozni. A készülék nem ideális feszültséggenerátor abban az értelemben, hogy kapocsfeszültsége megváltozik, ha a terhelést vagy a frekvenciát megváltoztatjuk, azonban a kimenő feszültség szabályozható, és annak állításával lehetséges a rezgőkörön konstans feszültséget tartani a rezonanciagörbe felvételénél.

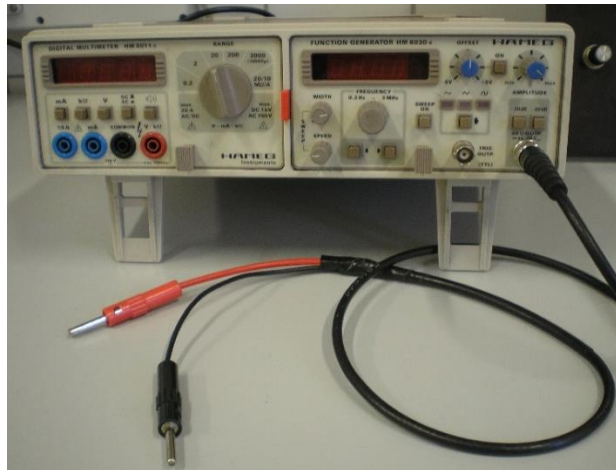


12. ábra. A függvénygenerátor

### Digitális univerzális műszerek

Áram-, feszültség- és ellenállásmérésre alkalmasak. Szinuszos váltakozó áram esetén a műszerről leolvasható érték az effektív érték (az amplitúdó  $\sqrt{2}$ -e). Általános szabály, hogy egy műszert mindig a legnagyobb méréshatárba kötünk be, majd fokozatosan csökkentjük a méréshatárt a legkisebbig, amibe még befér a mérendő érték.

A mérés során két műszert fogunk használni, egyet **ampermérő**ként, egyet **voltmérő**ként.

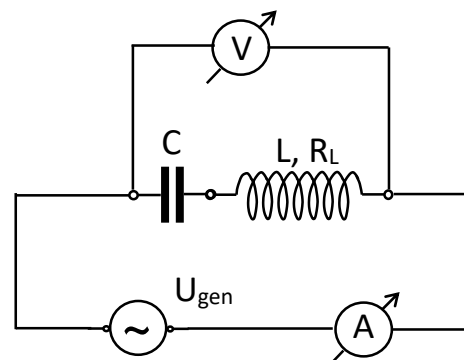


**13. ábra.** Az ampermérőként használt műszer és a függvénygenerátor. A generátoron beállított feszültség a kábellel köthető rá az áramkörre.

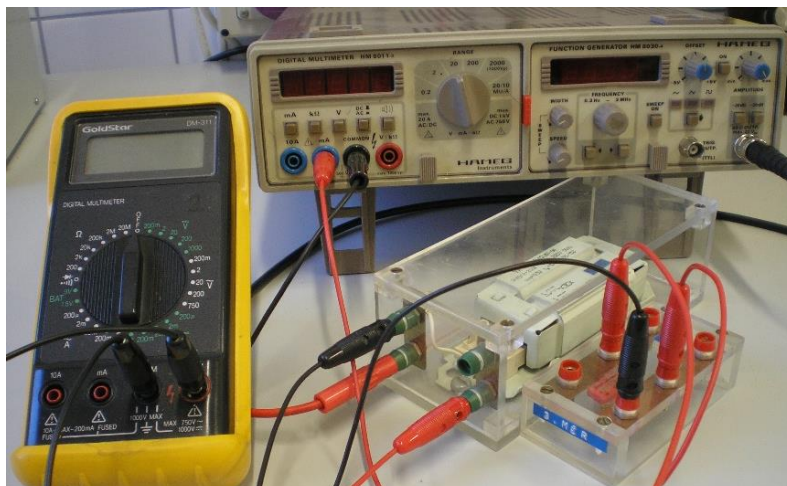
### 1. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének mérése

Állítsa össze a 14. ábra szerinti kapcsolást. Először kösse sorosan a generátor kimenetét, a tekercset, a kondenzátort, és az ampermérőt. Ezután kösse be a voltmérőt úgy, hogy a teljes rezgőkörön, vagyis a kondenzátor és a tekercs soros eredőjén eső feszültséget mérje. (Az ampermérőn eső feszültség ne legyen belemérve!)

**Mielőtt az áramkörre rákapcsolná a feszültséget, ellenőriztesse a mérésvezetővel!**



**14. ábra.** Az összeállítandó áramkör



**15. ábra.** Az összeállított áramkör. A sárga tokos műszert használjuk feszültségmérésre.

**Mérési feladat:**

1.) A rezonanciafrekvencia közelítő meghatározása tájékozódás céljából:

A hanggenerátoron állítson be szinuszos jelalakot, maximális kimenő feszültségamplitúdót és kb. 20-30 Hz frekvenciát, majd az ampermérőn állítsa be a méréshatárt. Kezdje el folyamatosan növelni a frekvenciát, és figyelje, hogyan változik az áram. Az árammaximumot akarjuk megkeresni, azaz azt a frekvenciát, aminél nagyobb frekvenciák esetén az áram már csökken a frekvencia növelésével.

A frekvencia növelésekor egy-egy tartomány végére érve a tartományváltó gomb megnyomása után álljon vissza a finomszabályozó gomb segítségével arra a frekvenciára, ahonnan a tartományt váltotta, hogy ne maradjanak ki frekvenciák. Az ampermérőn szükség esetén váltson méréshatárt. Az így meghatározott maximumhely a *közelítő* rezonanciafrekvencia. Azért csak közelítő, mert közben a feszültséget nem szabályoztuk, ezért a körön eső feszültség nem volt állandó. Jegyezze fel a közelítő rezonanciafrekvenciát az adatlapra.

2.) A rezonanciagörbe felvételénél alkalmazandó konstans feszültség kiválasztása:

Olvassa le a közelítő rezonanciafrekvencián a rezgőkörön eső feszültséget, és válasszon egy tetszőleges értéket ennek kb. a 60-80%-ánál. Ezen a feszültségen fogja mérni a rezonanciagörbe felvételekor az áramot, tehát ezt a feszültséget kell mutassa a rezgőkörre kötött voltmérő az ampermérő leolvasása előtt. A kívánt feszültségértéket a hanggenerátor amplitúdó gombjával (vagyis a hanggenerátor által leadott feszültség amplitúdójának változtatásával) tudja beállítani.

3.) A rezonanciagörbe felvétele: Legalább 10-12 mérési pontban

- állítsa be a frekvenciát,
- ellenőrizze és szükség esetén állítsa utána a konstans feszültséget,
- olvassa le az áramerősséget.

Ügyeljen arra, hogy úgy vegyen fel mérési pontokat, a mérési pontok alapján megrajzolt rezonanciagörbéből egyrészt a rezonanciafrekvencia 2-3 Hz pontossággal, másrészt a jósági tényező meghatározható legyen. Ez azt jelenti, hogy egyrészt a maximális áramhoz tartozó frekvencia (a rezonanciapont) környékén legalább 2-3 Hz-enként kell felvenni mérési pontokat lefelé és felfelé is, másrészt hogy a rezonanciapontban mért áramerősség  $\sqrt{2}$ -e alatt kevéssel is legyen egy-egy mérési pont a rezonanciafrekvenciánál kisebb és nagyobb frekvenciák irányába is.

**Kiértékelés:**

Ábrázolja a rezonanciagörbét! A diagramot lehet Excelben is készíteni, de mindenképpen egy folyamatos görbe legyen meghúzva (nem töröttvonal), és legyen megjelölve  $I_{\max}$  és  $I_{\max}/\sqrt{2}$ , valamint  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  és  $\nu_2$  értéke.

A rezonanciagörbéből állapítsa meg a rezonanciafrekvenciát ( $\nu_0$ ), és számolja ki a jósági tényezőt és a tekercs ohmikus ellenállását (23) és (18) alapján:

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1}, \quad R_L = \frac{U}{I_{\max}}.$$

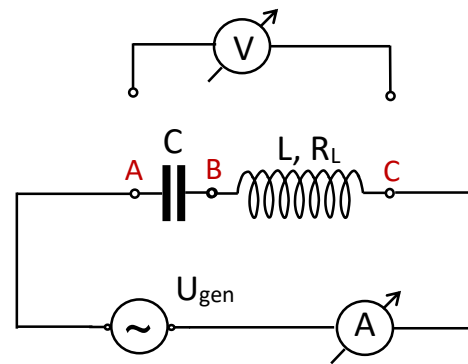
Szorgalmi feladat: Határozza meg  $R_L$ ,  $L$  és  $C$  értékét az  $I(\nu)$  függvény illesztésével. Érdemes először a 2.1. pont szerint kiszámolni  $C$  értékét, és ahhoz közeli értéket beírni az iteráció kiinduló értékének, vagy az illesztendő függvénybe beírni  $C$  nagyságrendjét. Töltse fel a fájlt a Moodleba.

**2. Soros rezgőkör áramköri jellemzőinek mérése****Mérési feladat:**

Állítson be a maximális amplitúdó 35–40%-a környékén egy tetszőleges értéket a hanggenerátoron, és ezt a továbbiakban már ne változtassa.

Sorban be kell állítani három különböző frekvenciát:  $0,9 \cdot \nu_0$ ,  $\nu_0$ ,  $1,1 \cdot \nu_0$  ( $\nu_0$  értékét az előző mérési sorozatból tudjuk). Ezután minden egyes frekvenciánál

- a) a voltmérőt a kondenzátor sarkaira kötve olvassa le az áramerősség ( $I_1$ ) és a kondenzátoron eső feszültség ( $U_C$ ) értékét;
- b) a voltmérőt a tekercsre kötve olvassa le az áramerősség ( $I_2$ ) és a tekercsen eső feszültség ( $U_{LR}$ ) értékét;
- c) a voltmérőt a kondenzátor és a tekercs soros eredőjére kötve olvassa le az áramerősség ( $I_3$ ) és a kondenzátor és tekercs eredőjén eső feszültség ( $U_{LRC}$ ) értékét.



**16. ábra.** Feszültségmérés a soros RLC körben:  
kondenzátor:  $U_{AB}$   
tekercs:  $U_{BC}$   
eredő:  $U_{AC}$

Ideális voltmérőt feltételezve egy adott frekvencián  $I_1$ ,  $I_2$  és  $I_3$  teljesen azonos lenne, a közöttük megfigyelhető kis különbségek mutatják a voltmérő befolyását.

### Kiértékelés:

**2.1.** Számítsa ki a C kapacitást és az L induktivitást a következő módon:

a) kondenzátort ideálisnak tekintjük, tehát

$$C = \frac{I_1}{\omega_0 \cdot U_C} ,$$

b) a tekercsnél figyelembe vesszük annak ohmikus ellenállását, vagyis

$$L = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_{LR}}{I_2}\right)^2 - R_L^2} .$$

A kondenzátor kapacitása és a tekercs induktivitása bármelyik frekvencián végzett mérés adataiból kiszámolható. A kötelező számítási feladat a rezonanciafrekvencia adataival számolni.

**2.2.** A fenti C és L és az 1. mérésben meghatározott  $R_L$  értékek felhasználásával számítsa ki a rezonanciafrekvenciát a (21) alapján, és a jósági tényezőt  $R_L$ , L és C értékéből (22) alapján, majd vesse össze a rezonanciagörbéből kapottakkal.

Szorqualmi feladat: Végezze el a **2.1.** és **2.2.** számolásokat a  $0,9 \nu_0$  ill. az  $1,1 \nu_0$  frekvencián mért adatokkal is (a számításokat a jegyzőkönyvbe írja).

**2.3.** A  $0,9 \cdot \nu_0$ ,  $\nu_0$ ,  $1,1 \cdot \nu_0$  frekvenciákon mért adatok felhasználásával mindhárom esetben szerkessze meg az impedanciák vektorábráját! A vektorábrákat megszerkesztheti a jegyzőkönyvben, vagy külön lapokon is, de célszerű kockás lapot használni.

Az impedanciavektorok hosszát a mért feszültség- és áramerősségek hányadosaként kapjuk meg.

A vektorok irányát az egyes mennyiségek fázisa szabja meg. Sorosan kapcsolt áramköri elemek impedanciái összeadódnak, ez a vektorábrában az impedanciavektorok vektori összegzését jelenti.

Feltételezzük, hogy

- a kondenzátor ideális, tehát a  $\tilde{Z}_C$  a képzetes tengely negatív irányába mutat;
- a tekercs reális, vagyis impedanciájának fázisa 0 és  $\pi/2$  közé esik.

A szerkesztés menete:

- készítsen léptéket az ábrázoláshoz;
- vegye fel a komplex síkon a képzetes tengely negatív irányába a kondenzátor impedanciáját;
- körzővel szerkessze meg az  $\tilde{Z}_C + \tilde{Z}_{LR} = \tilde{Z}_{LRC}$  vektorháromszög  $\tilde{Z}_C$ -vel szemközti csúcsát;
- rajzolja meg  $\tilde{Z}_{LRC}$ -t, és párhuzamos eltolással a  $\tilde{Z}_{LR}$  vektort.

**KÉRDÉSEK, GYAKORLÓ FELADATOK**

Az alábbi kérdésekre, feladatokra, ill. hasonlóakra lehet számítani a beugró kiszárthelyiben.

**MINIMUMKÉRDÉSEK**

Mik a mérési feladatok? Szükséges eszközök, kapcsolási rajzok. Mik a leolvasott mennyiségek, és milyen mennyiséget határozunk meg az egyes mérések során?

\*Igaz-e, hogy soros rezgőkörben

- a kondenzátoron mért feszültség lehet nagyobb is a generátorfeszültségnél?
- a kondenzátor feszültsége késik a generátorfeszültséghez képest?
- a kondenzátor árama késik a generátoráramhoz képest?
- a rezonanciafrekvencián az eredő impedancia független attól, hogy milyen kapacitású kondenzátor és milyen induktivitású tekercs van a körben?
- ha a kondenzátort kisebb kapacitásúra cseréljük, a rezonanciafrekvencia nő?
- a rezonanciafrekvencián a kör eredő impedanciájának minimuma van?
- konstans generátorfeszültség mellett a rezonanciafrekvencián az áramnak minimuma van?
- a tekercs impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?
- a generátorfeszültség *frekvenciájának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a generátorfeszültség *amplitúdójának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a tekercsen ill. a kondenzátoron eső feszültség aránya független a frekvenciától?
- állandó generátorfeszültség mellett a frekvenciát változtatva a kör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián maximális?
- a kondenzátor impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?

*\*A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

**1.** Egy kondenzátorból és egy veszteséges tekercsből álló soros rezgőkörben a rezonanciafrekvencián a kondenzátoron 3,6 V-ot, a teljes rezgőkörön 4,8 V-ot mérünk. Mekkora feszültséget mérnénk a tekercsen?

**2.** Mennyi a kondenzátor kapacitása, ha  $\nu = 199$  Hz frekvencián a kondenzátoron eső feszültség effektív értéke 1,6 V és a rajta átfolyó áram effektív értéke 0,5 mA?

**3.** Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy  $L = 0,2$  H önindukciós együtthatójú,  $R = 420 \Omega$  ellenállású veszteséges tekercssel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 7958 Hz lesz?

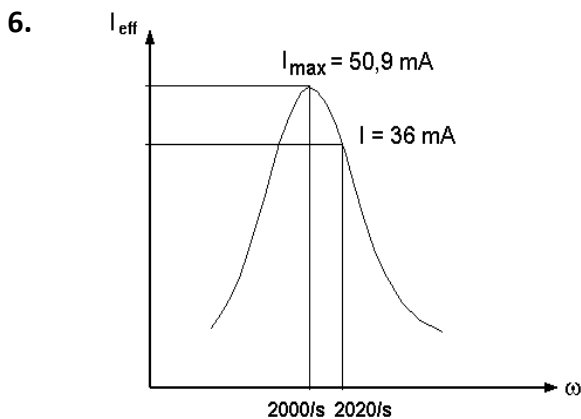
**4.** Sorosan kapcsolunk egy  $C = 200$  nF kapacitású kondenzátort és egy  $L = 0,5$  H önindukciós együtthatójú,  $R = 420 \Omega$  ellenállású veszteséges tekercset, és egy  $U_{\text{gen}} = 7,0$  V effektív feszültségű váltóáramú generátorra kötjük.

**a)** Mekkora áram fog folyni a körben 600 Hz frekvencián?

**b)** Mennyi a kör rezonanciafrekvenciája?

**5.** Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy  $L = 2,5$  H önindukciós együtthatójú,  $R = 250 \Omega$  ellenállású veszteséges tekercssel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 318 Hz lesz?

**b)** Hányszorosa a rezonanciafrekvencián a generátorfeszültség a kondenzátoron eső feszültségnek?

Megoldott feladatok:

Egy soros rezgőkörön folyó áram effektív értékét mérjük az  $\omega$  körfrekvencia függvényében, miközben a körön a feszültség értéke állandó,  $U_{\text{eff}} = 45,81 \text{ V}$ .

$\omega_0 = 2000 \text{ 1/s}$ -nál az áram mért (effektív) értéke maximális,  $I_{\text{max}} = 50,9 \text{ mA}$ .

Ha  $\omega_1 = 2020 \text{ 1/s}$ , az áramerősség effektív értéke  $I_1 = 36 \text{ mA}$ .

**a)** Határozzuk meg, milyen értékű ellenállásból, milyen induktivitású tekercsből és milyen kapacitású kondenzátorból áll a rezgőkör!

**b)** Mekkora teljesítmény fejlődik a körön  $\omega_0 = 2000 \text{ 1/s}$  és  $\omega_1 = 2020 \text{ 1/s}$  körfrekvencián?

*Megoldás:*

**a)**  $\omega_0$  a rezonancia-körfrekvencia;  $Z_0 = U_{\text{eff}} / I_{\text{max}} = 45,81 \text{ V} / 50,9 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 900 \Omega \rightarrow R = 900 \Omega$ .

$$\omega_1\text{-en } Z_1 = U_{\text{eff}} / I = 45,81 / 36 \cdot 10^{-3} = 1272,5 \Omega = \sqrt{R^2 + \left( \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)^2} = \sqrt{900^2 + \left( 2020 L - \frac{1}{2020 C} \right)^2},$$

és fel tudjuk még írni, hogy  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} = 2000$ .

Az egyenletrendszer megoldása  $L = 22,60 \text{ H}$ ,  $C = 11,06 \text{ nF}$ .

**b)**  $\omega_0$  körfrekvencián  $P_0 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{max}} = 45,81 \cdot 50,9 \cdot 10^{-3} = 2,332 \text{ W}$ ;

$\omega_1$  körfrekvencián  $P_1 = I_{\text{eff}}^2 R = (36 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 900 = 1,166 \text{ W}$ .

**7.** A Kossuth adó frekvenciája  $540 \text{ kHz}$ . Olyan soros rezgőkört akarunk készíteni, melynek itt van a rezonanciafrekvenciája, és a rezonanciafrekvencián a rezgőkör impedanciája  $100 \Omega$ , a jósági tényező pedig  $Q = 20$ .

**a)** Mennyi legyen  $L$  és  $C$ ?

**b)** Ha  $U_{g, \text{eff}} = 10 \text{ V}$ , mennyi áram folyik a teljes rezgőkörön a rezonanciafrekvencián, és annál  $20 \text{ kHz}$ -cel nagyobb frekvencián?

*Megoldás:*

**a.** a rezonanciafrekvencián  $Z_0 = 100 \Omega \rightarrow R = 100 \Omega$ .

$$Q = \omega_0 L / R = 2\pi \nu_0 L / R = 2 \cdot \pi \cdot 540 \cdot 10^3 \cdot L / 100 = 20 \rightarrow L = 0,5895 \text{ mH}.$$

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} \rightarrow C = 1 / (\omega_0^2 L) = 1 / ((2 \cdot \pi \cdot 540 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,59 \cdot 10^{-3}) = 147,4 \text{ pF}.$$

**b.** a rezonanciafrekvencián  $I_{\text{max}} = U_{\text{eff}} / Z_0 = 10 / 100 = 0,1 \text{ A}$ .

$\nu_1 = 560 \cdot 10^3 \text{ Hz}$  frekvencián az impedancia:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left( \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)^2} = \sqrt{100^2 + \left( 0,59 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 560000) - \frac{1}{147,4 \cdot 10^{-12} \cdot (2\pi \cdot 560000)} \right)^2} = 174,2 \Omega,$$

és az áram  $I_1 = U_{\text{eff}} / Z_1 = 10 \text{ V} / 174,2 \Omega = 57,41 \text{ mA}$ .



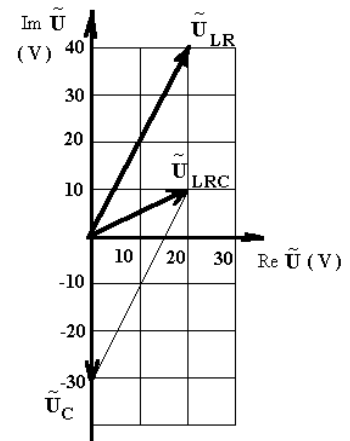
8. Sorosan kötünk egy veszteséges tekercset egy kondenzátorral, és a rezgőkört egy  $\omega = 5000$  1/s körfrekvenciájú váltóáramú generátorra kapcsoljuk.

Mérjük a rezgőkörön folyó áramot (ennek amplitúdója 5 mA) és a feszültséget az egyes elemeken, valamint a teljes rezgőkörön.

Az áram amplitúdója  $I_0 = 5$  mA. A komplex feszültségek vektorábrája az ábrán látható.

a) Számítsuk ki az L önindukciós együtthatót, a C kapacitást és az R ellenállást!

b) Mennyi a kör  $\nu_0$  rezonancia frekvenciája és Q jósági tényezője?



Megoldás:

a)  $\tilde{U}_C = -30i$  V,  $\tilde{Z}_C = \tilde{U}_C / \tilde{I} = -30i / 0,005 = -6000i$   $\Omega$

és  $\tilde{Z}_C = -i / (\omega C) \rightarrow C = 33,33$  nF.

$\tilde{U}_{LR} = 20 + 40i$  V,  $\tilde{Z}_{LR} = \tilde{U}_{LR} / \tilde{I} = (20 + 40i) / 0,005 = 4000 + 8000i$

$\tilde{Z}_{LR} = R + \omega Li \rightarrow R = 4000 \Omega = 4$  k $\Omega$ ,  $\omega L = 8000 \Omega$ ,  $L = 1,6$  H.

b)  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} = 4330$  1/s,  $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi = 689,2$  Hz

$Q = \omega_0 L / R = 1,732$ .