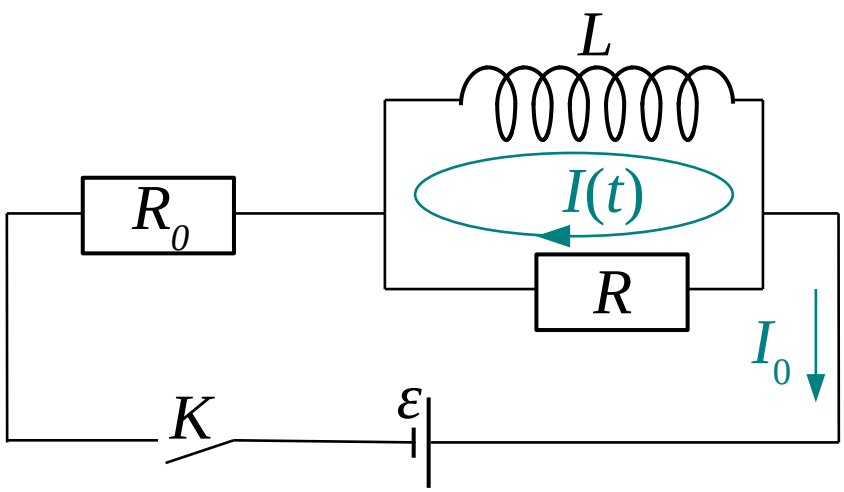
Tekercs energiája

emlékeztető: kikapcsolási jelenség
kikapcsolás után még folyik egy egyre csökkenő áram a tekercsen



$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

- ez az áram munkát (Joule-hő) végez az *R* ellenálláson
- ehhez valahonnan energia kell
- ez csak a tekercsben tárolódhat
- *R*-en végzett összes munka = a tekercs energiája kikapcsoláskor

Tekercs energiája 2

$$E_{tekercs} = W_R = \int_0^\infty P_R\,dt = \int_0^\infty R\,I^2(t)\,dt = R\int_0^\infty \left(I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 dt = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\,dt =$$

$$= RI_0^2\left[-\frac{L}{2R}e^{-2\frac{R}{L}t}\right]_0^\infty = \cancel{R}I_0^2\frac{L}{2\cancel{R}}\left(-0-(-1)\right) = \frac{1}{2}LI_0^2$$

V15

tehát ha egy tekercsen I áram folyik, akkor energiája: $\boxed{E_{tekercs} = \frac{1}{2}LI^2}$

Beugró

Hol tárolódik a tekercs energiája?
A mágneses terében!

Mágneses tér energiája

Emlékeztető: az önindukciós együttható: $L = \frac{\mu n^2 A}{l}$

szolenoid mágneses tere: $H = \frac{n I}{l} \Rightarrow I = \frac{H l}{n}$

$$E_{mágn} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu n^2 A}{l} \left(\frac{H l}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu \cancel{n^2} A}{\cancel{l}} \frac{H^2 l^{\cancel{2}}}{\cancel{n^2}} = \frac{1}{2} H \underbrace{\mu H}_{=B} \underbrace{A l}_{=V} = \frac{1}{2} HBV$$

Az energiasűrűség: $\rho_{\text{energia, mágn}} = \frac{E_{mágn}}{V} = \frac{1}{2} HB$

V10

Általában (anizotróp eset): $\boxed{\rho_{\text{energia, mágn}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}}$

Beugró

Ha van elektromos tér is: $\rho_{\text{energia, EM}} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

3.2. Váltakozó áram

Miért fontos?

- A konnektorban harmonikus (cos, sin) váltakozó áram folyik.

Miért nem egyenáram?

- Transzformátor: nagy feszültség, kis veszteség szállításkor; kis feszültség a felhasználóknál.

Miért harmonikus?

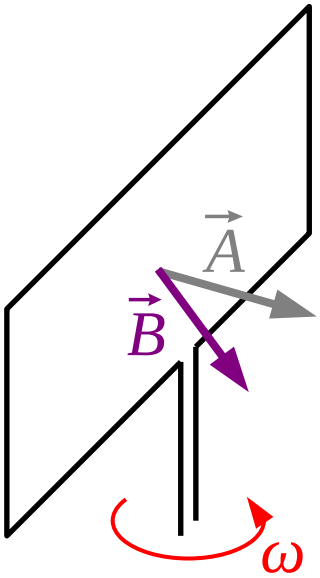
- Könnyű előállítani (forgómozgással).

Harmonikus váltóáram előállítása

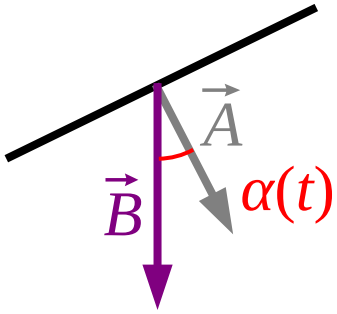
Faraday-féle indukciós törvény: indukált feszültséget hoz létre
a mágneses tér fluxusának változása:

- időben változó mágneses tér
- felület változása
  - nagyság (pl. csúszka)
  - irány (pl.: forgómozgás homogén, időben állandó térben)

Harmonikus váltóáram előállítása



metszet:



$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot \vec{dA} = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos(\alpha(t)) = BA\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA(-\omega\sin(\omega t + \alpha_0)) = BA\,\omega\sin(\omega t + \alpha_0) = U_0\sin(\omega t + \alpha_0)$$

legyen $\alpha_0 = \varphi + \frac{\pi}{2}$, és $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ miatt:

$$\boxed{U(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)}$$

V15

Kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Magneses_indukcio_II.ogv

Komplex írásmód

Tetszőleges, időben koszinuszosan változó mennyiségre alkalmazható
Szokásos felhasználás:

- váltóáram
- járművek felfüggesztése (rugó, lengéscsillapító)

Motiváció: egyenáram

Egyenáram esetén:

- $U/I=R$, állandó
- soros kapcsolásnál $U_e = U_1+U_2$ (párhuzamos kapcsolásnál $I_e = I_1+I_2$)
- ezekből levezethető az eredő ellenállás: $R_e=R_1+R_2$ ($1/R_e=1/R_1+1/R_2$)

Időben változó $U(t)$, $I(t)$ esetén általános esetben:

- $U(t)/I(t)$ nem állandó, függ az időtől
- $U_e(t)=U_1(t)+U_2(t)$ csak a pillanatnyi értékekre igaz
- Nem lehetne valami hasonlóan egyszerű összefüggést találni?

Váltóáram ellenállásokon

A feszültség: $U(t)=U_0\cos(\omega t)$

Tfh. Ohm-törvény igaz időfüggő esetre is, ekkor $I(t)=I_0\cos(\omega t)$

- $R=U(t)/I(t)=U_0\cos(\omega t)/I_0\cos(\omega t)=U_0/I_0$

Soros kapcsolás: $U_1(t)=U_{1,0}\cos(\omega t)$ és $U_2(t)=U_{2,0}\cos(\omega t)$

- az összegük: $U_e(t)=U_1(t)+U_2(t)=U_{1,0}\cos(\omega t)+U_{2,0}\cos(\omega t)=$
  $=(U_{1,0}+U_{2,0})\cos(\omega t)=U_{e,0}\cos(\omega t)$
- vagyis az **amplitúdók** simán összeadhatóak: $U_{e,0}=U_{1,0}+U_{2,0}$

Tehát az **amplitúdó**ra igazak az egyszerű összefüggések:

- hányadosuk állandó ($R=U_0/I_0$)
- soros kapcsolásnál egyszerűen összeadhatóak ($U_{e,0}=U_{1,0}+U_{2,0}$)

Ehhez aztán még tartozik egy **közös időbeli változás**: $\cos(\omega t)$

Váltóáram tekercs és kondenzátor esetén

- Nemsokára látni fogjuk: áram és feszültség **fázisa nem ugyanaz**, $U(t)=U_0\cos(\omega t+\varphi_U)$ és $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi_I)$
- Két sorba kapcsolt elem feszültségének fázisa is különbözik: $U_1(t)=U_{1,0}\cos(\omega t+\varphi_{1,U})$ és $U_2(t)=U_{2,0}\cos(\omega t+\varphi_{2,U})$

=> Nem lehet egyszerűen összeadni az amplitúdókat, osztás is bonyolult, bonyolult trigonometrikus összefüggések :(

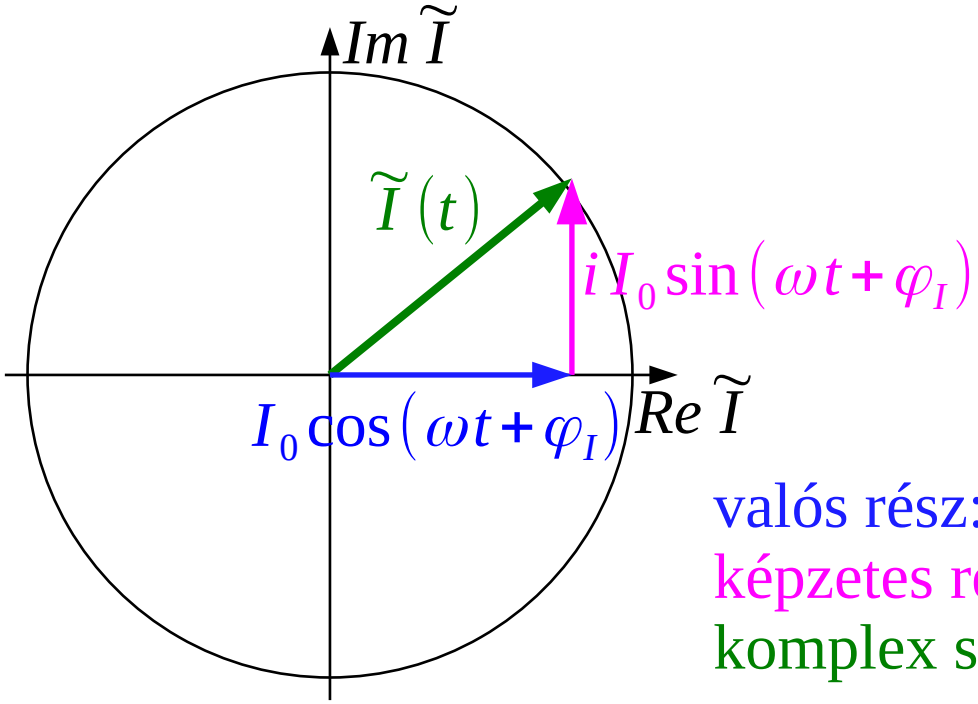
- Mechanika emlékeztető: rezgőmozgás a körmozgás vetülete
- Visszafelé: minden cos változáshoz hozzárendelhető egy körmozgás, azaz egy **2D forgó vektor** (hossza = amplitúdó)
- szögsebességük megegyezik (ω ugyanaz)

=> **forgás leválasztható** (megállítható), állandó vektorokat kell összeadni

- És az osztás? Vektorral nem lehet osztani :(

- Komplex számok: 2D vektor, amihez osztás is definiálva van.
- Ráadásul a hányados vektor szöge a fáziskülönbség :)

Komplex írásmód (az áramerősség példáján)



valós rész: mérhető fizikai mennyiség
képzetes rész: hozzá képzeljük
komplex szám: a cos-hoz rendelt forgó vektor

$$\tilde{I}(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) + i I_0 \sin(\omega t + \varphi_I) = I_0 [\cos(\omega t + \varphi_I) + i \sin(\omega t + \varphi_I)] =$$

$$= I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \underbrace{I_0 e^{i\varphi_I}}_{=\tilde{I}_0} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{forgás}} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$$

komplex áramerősség: $\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$

komplex amplitúdó: $\tilde{I}_0 = I_0 e^{i\varphi_I}$

Beugró

Komplex impedancia

Tehát a komplex áramerősség: $\tilde{I}(t)=\tilde{I}_0 e^{i\omega t}$, ahol $\tilde{I}_0=I_0 e^{i\varphi_I}$

hasonlóan a komplex feszültség: $\tilde{U}(t)=\tilde{U}_0 e^{i\omega t}$, ahol $\tilde{U}_0=U_0 e^{i\varphi_U}$

Hányadosuk: $\frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)}=\frac{\tilde{U}_0 e^{i\omega t}}{\tilde{I}_0 e^{i\omega t}}=\frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}=\frac{U_0}{I_0}e^{i\omega(\varphi_U-\varphi_I)}=\tilde{Z}$ időfüggetlen, komplex állandó **komplex impedancia**

Összegük:

$$\tilde{U}_e(t)=\tilde{U}_1(t)+\tilde{U}_2(t)=\tilde{U}_{1,0}e^{i\omega t}+\tilde{U}_{2,0}e^{i\omega t}=(\tilde{U}_{1,0}+\tilde{U}_{2,0})e^{i\omega t}=\tilde{U}_{e,0}e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow \tilde{U}_{e,0}=\tilde{U}_{1,0}+\tilde{U}_{2,0}$ a komplex amplitúdók összeadódnak

Tehát a **komplex amplitúdó**ra igazak az egyszerű összefüggések:

- hányadosuk állandó (ez a komplex impedancia)
- soros kapcsolásnál egyszerűen összeadhatóak

Ehhez aztán még tartozik egy **közös időbeli forgás**: $e^{i\omega t}$

Ellenállás impedanciája

alapösszefüggés az Ohm-törvény: $U(t)=R\,I(t)$

ha $U(t)=U_0\cos(\omega t)$, akkor $I(t)=I_0\cos(\omega t)$

$\Rightarrow$ komplex írásmód használható: $\tilde{U}(t)=R\,\tilde{I}(t)$

$$\tilde{U}_0 e^{i\omega t}=R\,\tilde{I}_0 e^{i\omega t} \quad /: e^{i\omega t}\neq 0$$

$$\tilde{U}_0=R\,\tilde{I}_0$$

$$\tilde{Z}_R=\frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}=R$$

Tekercs impedanciája

alapösszefüggés: $U_L(t) = L\dfrac{dI_L(t)}{dt}$

ha $U_L(t) = U_{L,0}\cos(\omega t)$, akkor $I_L(t) = I_{L,0}\sin(\omega t) = I_{L,0}\cos(\omega t - \pi/2)$

$\Rightarrow$ komplex írásmód használható: $\tilde{U}_L(t) = L\dfrac{d\tilde{I}_L(t)}{dt}$

$$\tilde{U}_{L,0}e^{i\omega t} = L\frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_{L,0}e^{i\omega t}\right) = i\omega L\tilde{I}_{L,0}e^{i\omega t} \qquad /: e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\tilde{U}_{L,0} = i\omega L\tilde{I}_{L,0}$$

$$\tilde{Z}_L = \frac{\tilde{U}_{L,0}}{\tilde{I}_{L,0}} = i\omega L$$

A kondenzátor impedanciájával együtt: $\boxed{\text{V10}}$

Kondenzátor impedanciája

alapösszefüggés: $U_C = \frac{Q_C}{C}$, időfüggő esetben is érvényes: $U_C(t) = \frac{Q_C(t)}{C}$

emlékeztető: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} I_C(t)$

ha $U_C(t) = U_{C,0}\cos(\omega t)$, akkor $I_C(t) = -I_{C,0}\sin(\omega t) = I_{C,0}\cos(\omega t + \pi/2)$

$\Rightarrow$ komplex írásmód használható: $\frac{d\tilde{U}_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}\tilde{I}_C(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\tilde{U}_{C,0} e^{i\omega t}\right) = i\omega \tilde{U}_{C,0} e^{i\omega t} = \frac{1}{C}\tilde{I}_{C,0} e^{i\omega t} \qquad /: i\omega e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\tilde{U}_{C,0} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_{C,0}$$

$$\tilde{Z}_C = \frac{\tilde{U}_{C,0}}{\tilde{I}_{C,0}} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

V10

Komplex impedanciák összefoglalva

a **komplex impedancia** definíciója: $\boxed{\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}}$

ohmos **ellenállás**: $\boxed{\tilde{Z}_R = R}$

tekercs: $\boxed{\tilde{Z}_L = i\,\omega L}$, L a tekercs önindukciós együtthatója

kondenzátor: $\boxed{\tilde{Z}_C = \frac{1}{i\,\omega c} = \frac{-i}{\omega C}}$, C a kondenzátor kapacitása

Beugró

A Kirchhoff-törvények a komplex amplitúdókra

Kirchhoff csomóponti és huroktörvénye a pillanatnyi áramokra és feszültségekre (U_L-lel) igaz

=> a pillanatnyi komplex értékekre is igaz

csomóponti törvény: $0=\sum_{k=1}^{n}\tilde{I}_k(t)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{I}_{k,0}e^{i\omega t}=e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{n}\tilde{I}_{k,0} \qquad /:e^{i\omega t}\neq 0$

$\boxed{0=\sum_{k=1}^{n}\tilde{I}_{k,0}}$ a komplex amplitúdókra

huroktörvény hasonlóan: $\sum_{i=1}^{n}\tilde{U}_i(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n}\tilde{U}_{i,0}=0}$

impedanciák kapcsolására belátható:

soros kapcsolás: $\tilde{Z}_{eredő}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{Z}_i$ párhuzamos kapcsolás: $\frac{1}{\tilde{Z}_{eredő}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tilde{Z}_i}$

Vagyis a komplex amplitúdókkal és impedanciákkal formailag ugyanúgy számolhatunk, mint egyenáramok esetén.

Váltóáram teljesítménye

Joule-törvény érvényes időfüggő esetre is: $P(t)=U(t)\,I(t)$

harmonikus eset $U(t)=U_0\cos(\omega t)$, és $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$

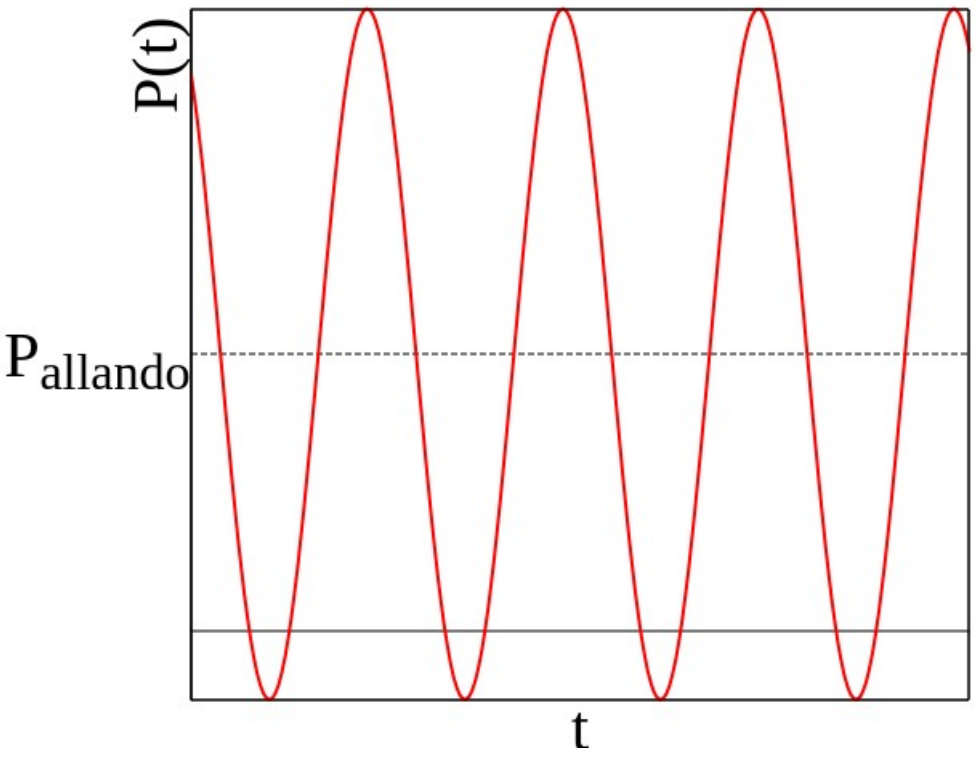
$$P(t)=U_0 I_0\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)=\ldots=\frac{U_0 I_0}{2}\left[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)\right]$$

azaz: $P(t)=P_{állandó}+P_{változó}(t)$

átlagteljesítmény: $\bar{P}=\dfrac{\int_0^T P(t)\,dt}{T}$

hosszú időre: $\lim_{T\to\infty}\bar{P}=P_{állandó}$

$$\boxed{\bar{P}=\frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi}$$



Negatív teljesítmény

ideális tekercs vagy kondenzátor: $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$P_{állandó} = 0$, $P_{változó}$ pozitív és negatív félperiódusok

- $P>0$: az áram munkát végez, energia az elektromos/mágneses térbe
- $P<0$: az el./mágn. tér leépül, az energia visszakerül a hálózatba

Ha ellenállás is van:
- azon mindig $P>0$, Joule-hő
- eredő teljesítményben lehet $P<0$ szakasz,
  ha a térből több energia kerül vissza, mint a Joule-hő

Effektív feszültség és áramerősség

effektív érték: az az egyenfeszültség és egyenáram, amelyek teljesítménye ohmos ellenálláson ugyanannyi, mint a váltóáram teljesítménye

ohmos ellenálláson φ=0 → $\bar{P} = U_0 I_0 / 2$ → $\boxed{U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \text{ és } I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}}$

az effektív értékekkel: $\bar{P} = U_{eff} I_{eff}$

és ezekre igaz: $U_{eff} = |\tilde{Z}| I_{eff}$

Köszönöm a figyelmet!