1. Sztatika

feltételezések: $\vec{j}=0$; $\dot{\vec{B}}=0$; $\dot{\vec{D}}=0$

1.2. Elektrosztatika

$$div\,\vec{D}=\rho$$
$$\boldsymbol{rot}\,\vec{E}=-\dot{\vec{B}}$$
$$div\,\vec{B}=0$$
$$\boldsymbol{rot}\,\vec{H}=\vec{j}+\dot{\vec{D}}$$

Maxwell-egyenletek

$$\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=\int_V \rho\,dV$$
$$\oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=-\int_A \dot{\vec{B}}\cdot\vec{dA}$$
$$\oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0$$
$$\oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=\int_A \vec{j}\cdot\vec{dA}+\int_A \dot{\vec{D}}\cdot\vec{dA}$$

sztatika esetén: $\vec{j}=0,\ \dot{\vec{B}}=0,\ \dot{\vec{D}}=0$

$$div\,\vec{D}=\rho$$
$$\boldsymbol{rot}\,\vec{E}=0$$

Elektrosztatika

$$\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA}=\int_V \rho\,dV$$
$$\oint_G \vec{E}\cdot\vec{dr}=0$$

$$div\,\vec{B}=0$$
$$\boldsymbol{rot}\,\vec{H}=0$$

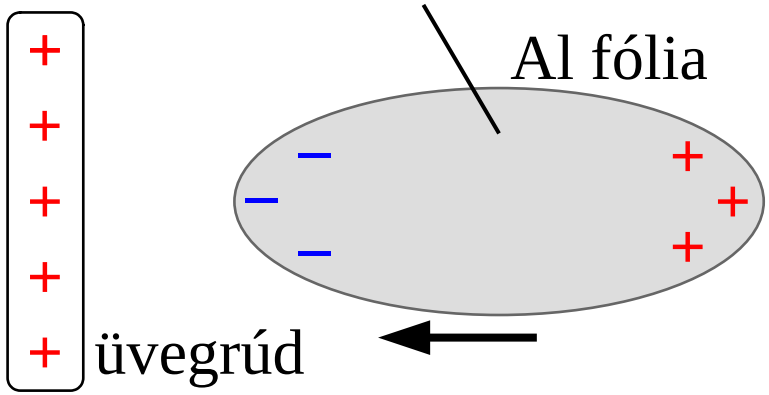
Magnetosztatika

$$\oint_A \vec{B}\cdot\vec{dA}=0$$
$$\oint_G \vec{H}\cdot\vec{dr}=0$$

Az elektrosztatikus alapjelenség

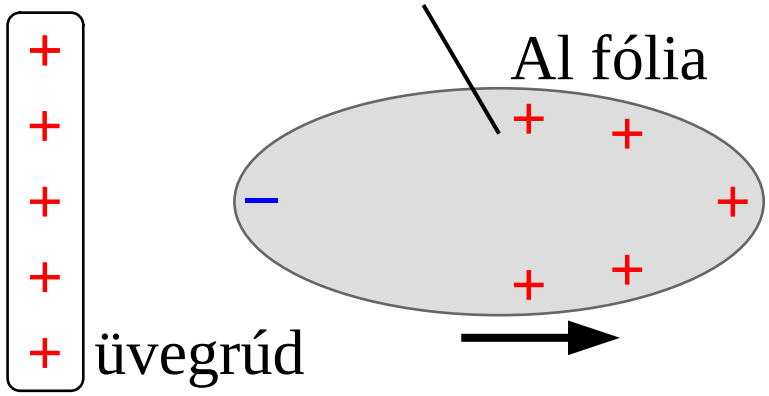
kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Dorzselektromossag_I.ogv

Vezetővel



1.) fémlemez odaugrik az üvegrúdhoz

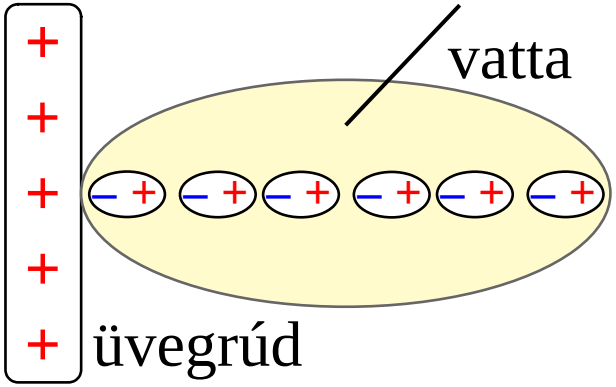
- dörzselektromosság => üvegrúd feltöltődik
- vonzás oka: **elektromos megosztás**
- **vezető**: olyan anyag, amelyben töltéshordozók vannak
- **töltéshordozó**: töltéssel bíró részecske, ami erő hatására könnyen el tud mozdulni
- azonos töltések taszítják, ellentétesek vonzzák egymást
- eredő vonzáshoz kell: üvegrúdtól távolodva csökkenjen a kölcsönhatás erőssége



2.) fémlemez eltaszítódik

- oka: az üvegrúdról töltés adódik át
- azonos töltések taszítják egymást

Szigetelővel



1.) odaugrik, tapad

- tökéletes szigetelő örökké ott maradna
- valóság: lassan egy kis töltés átadódik, elpattan

szigetelőben nincs szabad töltéshordozó, miért ugrik oda?

- **polarizáció**, dipólusok rendeződnek
- pozitív töltések messzebb lesznek, mint a negatívak

Összehasonlítás

- Vezető
- monopólus
- külön + és – töltés
- szét lehet választani
- elektromos megosztás

- Szigetelő
- dipólus
- + és – töltés nem választható szét
- dipólus rendeződhet
- polarizáció

Videó: mutatványok a XVIII. sz-ban

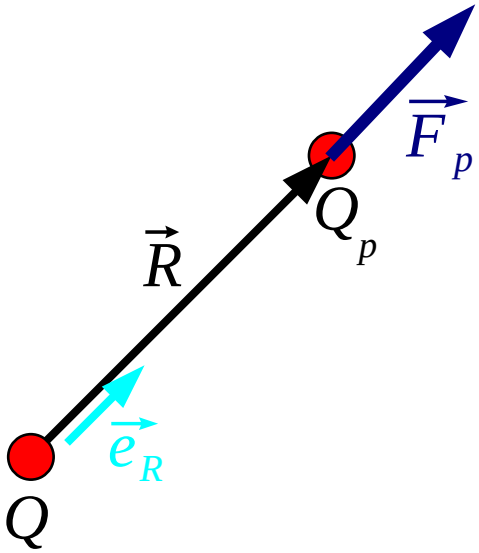
Részletek a BBC „Shock and Awe: The Story of Electricity” c. sorozatának 1. részéből („The Spark”)

Coulomb-mérleg

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Coulomb_merleg.ogv

Coulomb-törvény

kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Fájl:Coulomb_merleg.ogv



Q töltés által a Q_p próbatöltésre kifejtett erő:

$$\vec{F}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{QQ_p}{R^2}\vec{e}_R$$

Beugró

$\vec{R}$ a Q töltésből a Q_p próbatöltésbe mutató vektor,

és $\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ az $\vec{R}$ irányú egységvektor

$\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ a **vákuum permittivitása**

megj.: erős kölcsönhatás, két protonra: $\frac{F_{Coulomb}}{F_{gravitáció}} = 1{,}237 \cdot 10^{36}$!

Elektromos térerősség

nemcsak ponttöltésre, hanem általában is

Mérési utasítás:

- vizsgálandó pontba egy ponttöltés, mérjük a rá ható erőt (pl.: rugós erőmérővel)
- aztán a többi érdekes pontban is
- osztunk a próbatöltés nagyságával, hogy a mérőeszköztől független legyen az eredmény

definíció: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_p}{Q_p}$ Beugró mértékegysége: $[\vec{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

=> elektromos térbe helyezett **ponttöltésre ható erő:** $\vec{F} = Q\vec{E}$ Beugró

Mekkora legyen Q_p?

- kicsi, hogy a mérőműszer ne (nagyon) változtassa a mérendőt
- elég nagy, hogy F_p jól mérhető legyen

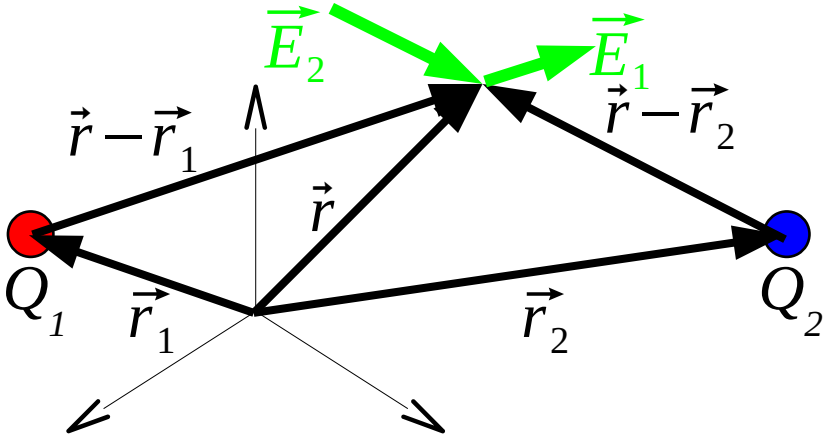
Ponttöltés térerőssége

Coulomb-törvényt beírjuk a térerősség definíciójába:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}_p}{Q_p}=\frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\cancel{Q_p}}{R^2}\vec{e}_R}{\cancel{Q_p}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\vec{e}_R$$

sok töltés esetén szuperpozíció:

$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$



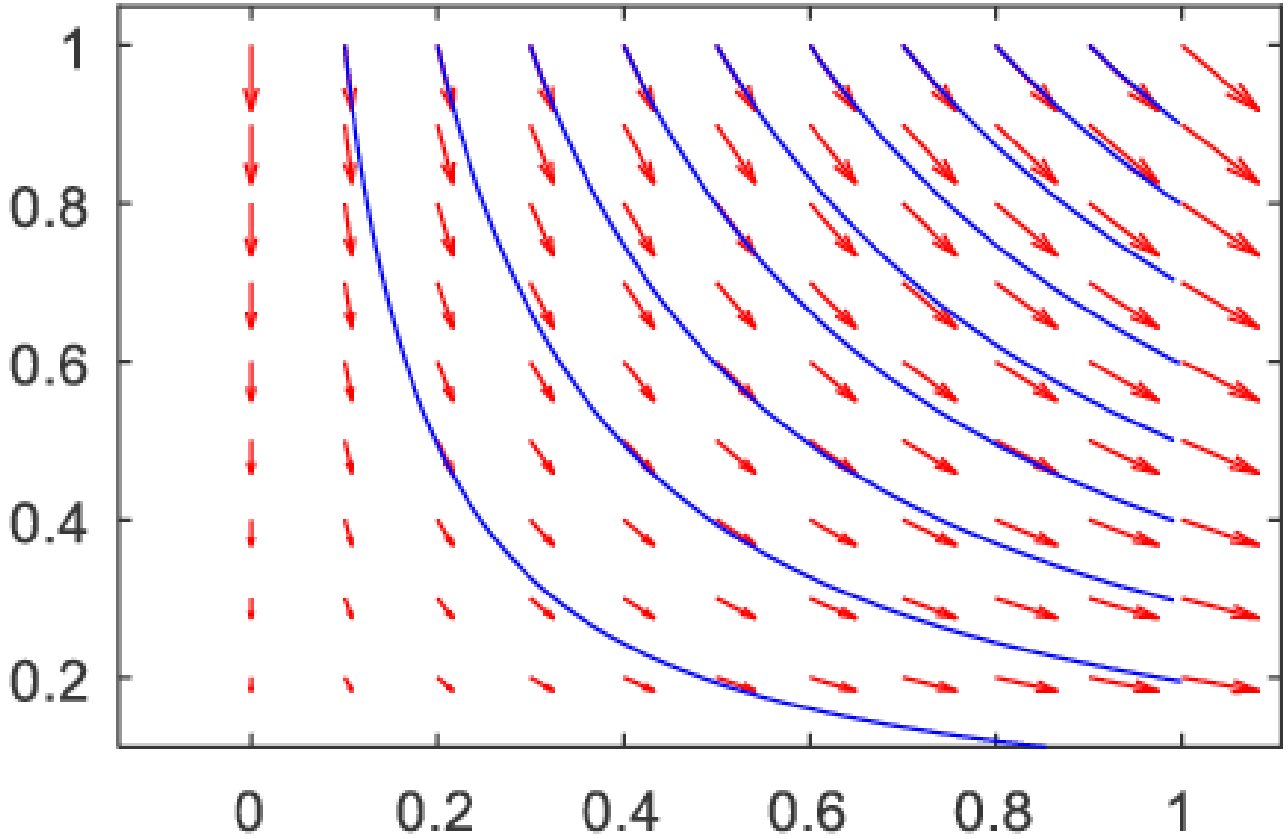
Vektorvonalak

vektorterek ábrázolására
(elektromos) erőtér: erővonalak, sebességtér: áramvonalak
pl.: szélcsatorna

Vektorvonalak

vektorvonal = **irányított görbe**
vektortér

- iránya: vonalhoz húzott (irányított) érintő
- nagysága: vektorvonalak sűrűségéből, egységnyi felületen hány vonal halad át



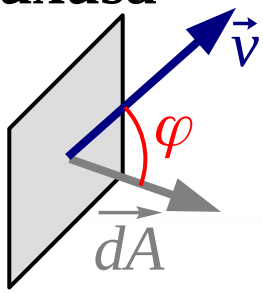
Fluxus

vektortér fluxusa egy A felületen: hány vektorvonal halad át rajta (előjeles)

matematikailag: $\Phi_v = \int_A \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$ felületi integrál

speciálisan $\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$ az **elektromos térerősség fluxusa**

Beugró



homogén eset, sík felület: $\Phi_v = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\Delta A} = |\vec{v}| \cdot \Delta A \cdot \cos\varphi$

pl.: áramló levegő térfogatárama egy ablakkereten át

inhomogén eset, görbe felület: kis sík felületekre bontjuk (diszkógömb)

erre összegzünk: $\sum_i \vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\Delta A_i}$

határesetben felületi integrál: $\lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\Delta A_i} = \int_A \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$

$\overrightarrow{dA}$ vektor:

- nagysága: felületelem nagysága
- iránya: merőleges a felületre
  - zárt felületnél kifelé
  - peremen körüljárási irány, jobbkéz-szabály

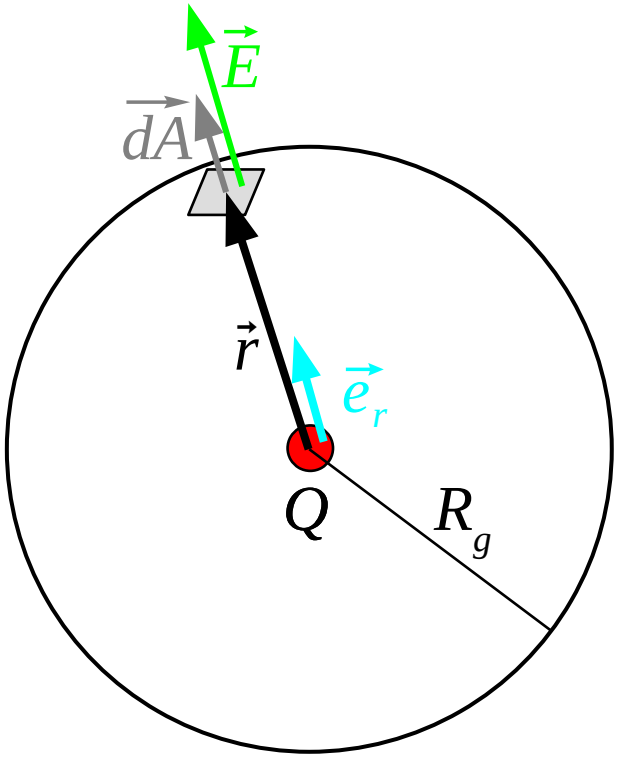
Elektrosztatika 1. alaptörvénye

A Q töltésből kiinduló összes erővonal száma egyenlő az elektromos térerősség Q töltést körbevevő zárt felületre számolt fluxusával: $N_Q = \Phi_E$

Elvben erővonal megjelenhetne vagy eltűnhetne a semmiben.
Az 1. alaptörvény azt mondja, hogy az elektromos tér nem ilyen,
az erővonalak pozitív töltésből indulnak és negatív töltésben végződnek,
azaz az elektromos tér forrása az elektromos töltés.

Levezetés ponttöltésre

Q ponttöltés, A legyen egy R_g sugarú gömb



$$\Phi_E = \oint_A \vec{E}\cdot\vec{dA} = \oint_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2}\vec{e}_R\cdot\vec{dA} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_g^2}\oint_A \vec{e}_R\cdot\vec{dA} =$$

$$\vec{e}_R\cdot\vec{dA} = |\vec{e}_R|\cdot|\vec{dA}|\cdot\cos\alpha = 1\cdot dA\cdot 1 = dA\text{, mert } \vec{e}_R \| \vec{dA}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_g^2}\underbrace{\oint_A dA}_{\text{felület}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_g^2}4\pi R_g^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

tehát Φ_E nem függ a sugártól, azaz 0 sugarú gömbre (N_Q) is ugyanennyi,

tehát $N_Q = \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$

V15

Coulomb-törvényben $1/r^2$ <=> erővonal eleje, vége csak töltésben lehet

- ha pl. $1/r^{1,99}$ lenne: erővonalak keletkeznének
- ha pl. $1/r^{2,01}$ lenne: erővonalak eltűnnének

Tetszőleges zárt felületre is belátható:

Gauss-törvény: $\oint_A \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

felírtuk: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

vákuumban nincs részecske, így dipólus se, emiatt $\vec{P} = \vec{0}$, vagyis $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$\oint_A \vec{D} \cdot \vec{dA} = Q$ **elektrosztatika 1. alaptörvénye** globális alakban

Beugró

ez lesz Maxwell I.

Forrássűrűség (divergencia)

Ismétlés: forráserősség: $F_{\vec{v}} = \oint_A \vec{v} \cdot \vec{dA}$, és forrássűrűség: $\rho_{F,\vec{v}} = div\,\vec{v}$

analógia: tömegsűrűség

átlagsűrűség: $\langle \rho_m \rangle = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ egy pontban: $\rho_m = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V}$

hasonlóan a **térfogati töltéssűrűség:** $\rho_Q = \lim_{V \to 0} \frac{Q}{V}$

Beugró

ugyanígy a forrássűrűség: $\rho_{F,\vec{v}} = \lim_{V \to 0} \frac{F_{\vec{v}}}{V}$

ebből a **divergencia** definíciója: $div\,\vec{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_A \vec{v} \cdot \vec{dA}$

divergencia Descartes koordinátákban: $div\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Integrálva

tömegsűrűség / töltéssűrűség térfogati integrálja a tömeg / töltés

pl.: $\int_V \rho_Q \, dV = \int_V dQ = Q$

ugyanígy a forrássűrűség térfogati integrálja a forráserősség:

$$\int_V \rho_{F,\vec{v}} \, dV = F_{\vec{v}}$$

azaz: $\int_V div\,\vec{v} \, dV = \oint_A \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$

ez a Gauss-Osztrogradszkij-tétel (divergenciatétel)

Elektrosztatika 1. alaptörvénye lokális alakban

globális alakból a Gauss-Osztrogradszkij tétellel kapjuk a lokálisat

$$\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA} = Q = \int_V \rho_Q \, dV$$

$$\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA} = \int_V div\,\vec{D}\, dV$$

$$\int_V div\,\vec{D}\, dV = \int_V \rho_Q \, dV$$

tetsz. V-re igaz

$$\boxed{div\,\vec{D} = \rho_Q}$$

globális alak

$$\oint_A \vec{D}\cdot\vec{dA} = Q$$

A $\vec{D}$-tér forrása a Q töltés

lokális alak

$$div\,\vec{D} = \rho_Q$$

A $\vec{D}$-tér forrássűrűsége a ρ_Q töltéssűrűség

Beugró

Köszönöm a figyelmet!