1. MECHANIKA

Periodikus mozgások: körmozgás, rezgések, lengések

A mérés célja A címben szereplő mozgásokat mindennapi tapasztalatainkból jól ismerjük, és korábbi tanulmányainkban is foglakoztunk velük. Ennek a gyakorlatnak célja egyrészt az, hogy ezeket a mozgásokat kísérletileg tanulmányozva még több közvetlen tapasztalatot szerezzünk róluk, másrészt ez a mérés arra is lehetőséget teremt, hogy átismételjük a mechanika néhány fogalmát és módszerét.

Elméleti bevezető

1. Körmozgás

Itt most csak az *egyenletes* körmozgással foglalkozunk. Kinematikai leírással élve egy anyagi pontnak olyan síkmozgásáról van szó, amely egy állandó R sugarú körön történik, mégpedig úgy, hogy a mozgás szögsebessége (ω) nem változik. Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az egyenletes körmozgás is gyorsuló mozgás, mert bár a sebesség nagysága nem, annak *iránya* állandóan változik. A gyorsulás a kör középpontja felé mutat (centripetális gyorsulás), nagysága pedig $a_{cp} = R \cdot \omega^2$.
Dinamikai szempontból ebből az következik, hogy amennyiben egy m tömegű pont kering ezen a körpályán, akkor ez csak úgy valósulhat meg, hogy a tömegpontra ható erők eredője állandóan a kör középpontja felé irányul és nagysága $m \cdot a_{cp}$. Szokás ezt centripetális erőnek nevezni: $F_{cp} = m \cdot a_{cp}$.
A centripetális erőt kifejtheti pl. egy kötél vagy egy kör alakú pálya.

Az egyenletes körmozgás létrejöttének (vagyis az állandó nagyságú sebességnek) a feltétele az, hogy az érintő irányú erők eredője zérus legyen.

2. Rezgőmozgás

***2.1. A harmonikus rezgőmozgás** – mint a körmozgás vetülete*

Középiskolából tudjuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás az egyenletes körmozgás vetületének fogható fel. Ez kinematikai szempontból teljesen kielégítő magyarázat, hiszen tulajdonképpen csak annyit mond, hogy a vetület mozgását ezentúl harmonikus rezgőmozgásnak fogjuk nevezni. Azt a kérdést azonban, hogy egy rugóra felfüggesztett tömegpont miért végez éppen ilyen mozgást, nemigen firtattuk. Mielőtt azonban erre a kérdésre rátérnénk, ismételjük át röviden a harmonikus rezgőmozgás kinematikai leírását.
A körmozgás pályája legyen az x–y síkban elhelyezkedő R sugarú kör. A kör középpontja legyen az origó. Ezen a pályán állandó ω szögsebességgel mozogjon egy m tömegű anyagi pont.
Ez azt jelenti, hogy amennyiben a helyvektornak az x tengellyel bezárt szögét φ-vel jelöljük, akkor ez a szög egyenletes körmozgás esetén az idővel arányosan nő: $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$,
ahol φ_0 a φ szög értéke a t = 0 időpillanatban.
A helyvektor x és y komponense ennek megfelelően:

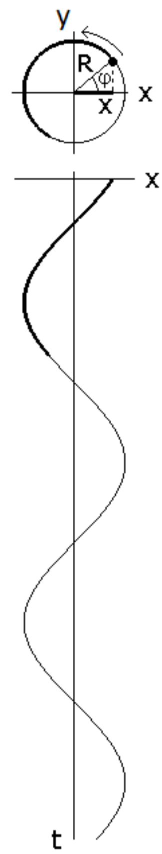
$$x(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{ill.} \quad y(t) = R \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Tekintsük most az x tengelyen vett vetület mozgását, az R sugárra utaló jelölést pedig váltsuk fel az A jelöléssel, ami a harmonikus rezgőmozgás amplitúdója lesz. Így tehát

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

ami valóban a harmonikus rezgőmozgás egyenlete az x kitérésre. Itt
ω a harmonikus rezgőmozgás *körfrekvenciáját* jelöli,
A az *amplitúdót* (a maximális kitérést),
φ a *fázist,*
φ_0 a *fázisállandót*, más néven *kezdőfázist*.
A körfrekvencia és a ν *frekvencia,* ill. T *periódusidő* összefüggése:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi / T .$$



Egyenletes körmozgás és vetülete

A harmonikus rezgőmozgás sebessége és gyorsulása

Az elméleti előadáson látjuk, hogy a fenti x(t) függvény deriválásával megkapjuk a harmonikus rezgőmozgást végző test sebességét:

$$v(t) = dx/dt = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

illetve újbóli deriválásával a gyorsulását:

$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2 = -A\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)$.

Összefüggés a harmonikus rezgőmozgás ’a’ gyorsulása és ’x’ kitérése között

A gyorsulást az alábbi formába írva

$a(t) = -\omega^2\cdot [A\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)]$

jól látható, hogy a szögletes zárójelen belül szereplő mennyiség éppen az x(t). Vagyis felírható, hogy

$a(t) = -\omega^2\cdot x(t)$.

Dinamika. A harmonikus rezgőmozgás és a rugóerő kapcsolata

Szorozzuk meg az előző egyenlet mindkét oldalát a mozgó pont tömegével:

$m\cdot a = -m\cdot\omega^2\cdot x$.

Ha ezek után a dinamika második axiómájának felhasználásával az ’m·a’ szorzat helyébe az F erőt írjuk, valamint az egy adott mozgás során állandó ’$m\cdot\omega^2$’ helyébe egy másik állandót írunk, amit k-val jelölünk, akkor arra az erőre, ami a harmonikus rezgőmozgást létrehozza, az alábbi egyenletet kapjuk:

$F = -k\cdot x$,

ami nem más, mint a *rugalmas erő erőtörvénye*, amennyiben x a rugó *deformációja*, azaz a rugó *nyugalmi hosszától* mért eltérés. Az x deformáció a rugó megnyúlása esetén pozitív, rövidülése esetén pedig negatív. A visszahúzó erő nagysága egy ideális rugónál arányos annak deformációjával, és azzal ellentétes irányú, éppen úgy, ahogy a fenti formula mutatja. Ezzel tehát beláttuk, hogy a rugóerő valóban harmonikus rezgőmozgást hoz létre.

A mozgásegyenlet megoldása rugalmas erő esetén

A fentiekben a harmonikus rezgőmozgás egyenletéből, az x(t) függvényből jutottunk el a mozgásegyenlethez, hogy belássuk, a rugóerő harmonikus rezgőmozgást hoz létre. A fordított utat bejárva viszont megkaphatjuk azt, hogy egy adott m tömegű testet egy adott k rugóállandójú rugó végéhez rögzítve milyen rezgőmozgás jön létre, azaz mennyi lesz a rezgés körfrekvenciája, periódusideje, amplitúdója, fázisállandója.

A fentebbi képletek összevetésével látható, hogy adott m tömeg és k rugóállandó esetén mindig olyan harmonikus rezgőmozgás fog létrejönni, amelynek körfrekvenciája $\omega = \sqrt{k/m}$,

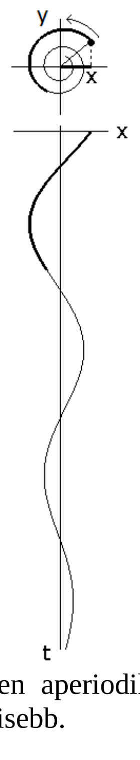
azaz a periódusideje

$T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Az egyes konkrét mozgások azonban különböznek az A amplitúdó és a φ_0 kezdőfázis szerint. Ezeket az ún. kezdeti feltételek – azaz az x_0 a kezdeti kitérés és v_0 a kezdősebesség – szabják meg:

$$\varphi_0 = \mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{v_0}{\omega\cdot x_0}\right), \qquad A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^{\,2}} .$$

2.2. Csillapított rezgőmozgás



A csillapított rezgőmozgás esetén a szokásos rugóerő mellett egy a sebességgel arányos, de azzal ellentétes irányú *súrlódási erő* is fellép, így a mozgásegyenlet:

$m\cdot d^2x/dt^2 = -k\cdot x - c\cdot dx/dt$.

Ennek megoldása felfogható egy olyan egyenletes körmozgás vetületeként, ahol a szögsebesség állandó, de a körmozgás r sugara folyamatosan csökken (nem lineárisan, hanem exponenciálisan: $r = r_0\cdot e^{-\beta\cdot t}$).

A csillapított rezgőmozgás egyenlete tehát a következő alakú:

$x(t) = A_0\cdot e^{-\beta\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)$.

A_0 és φ_0 értékét a kezdeti feltételek (azaz x_0 és v_0) határozzák meg.

Látható, hogy az amplitúdó exponenciálisan csökken: $A = A_0\cdot e^{-\beta\cdot t}$,

ahol a β csillapítási tényezőt a test tömege és a súrlódási erőben szereplő c konstans határozzák meg: $\beta = c/(2m)$.

A csillapított rezgőmozgás ω körfrekvenciája kisebb (periódusideje nagyobb), mint az ugyanazon rugóval és testtel létrehozott csillapítatlan rezgőmozgásé, méghozzá

$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \beta^2}$,

ahol $\omega_0^2 = k/m$ a csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciája.

Ha a csillapítás igen nagy (ha $\beta \geq \omega_0$), akkor a mozgás *aperiodikussá* válik. Az ilyen aperiodikus mozgásokkal azonban itt nem foglalkozunk, mivel a kísérleteinkben a csillapítás ennél jóval kisebb.

2.3. Rugó függőleges pozícióban

Eddig a harmonikus és csillapított rezgőmozgás tárgyalásánál nem vettük figyelembe a gravitáció hatását, a függőleges elrendezésnél azonban számolni kell azzal is.

Nézzünk egy rugóra felfüggesztett tömegpontot. Jelölje y az m tömegpont helyzetét a felfüggesztési ponttól mérve, és l_0 a rugó nyugalmi hosszát; ekkor az m tömeg mozgásegyenlete a csillapítást is figyelembe véve az alábbi alakú lesz:

$$m \cdot d^2y/dt^2 = -k \cdot (y - l_0) + mg - c \cdot dy/dt.$$

A rendszer egyensúlyi pontja az a pont, ahová helyezve a tömegpont ott is marad, amennyiben nincsen sebessége (dy/dt=0); ez a pont az, ahol a rugóerő és a nehézségi erő kompenzálja egymást, így a tömegpontnak ott nincs gyorsulása ($d^2y/dt^2=0$). Ezeket a feltételeket a mozgásegyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy a kérdéses egyensúlyi pont y koordinátája

$$y_E = l_0 + mg/k.$$

Ha bevezetünk egy új x változót, amely azt mutatja meg, hogy a tömegpont milyen távol van ettől az egyensúlyi ponttól:

$$x = y - y_E = y - (l_0 + mg/k)$$

és átírjuk erre a mozgásegyenletet, felhasználva, hogy az új és régi változó időderiváltjai megegyeznek (hiszen l_0 és mg/k időtől független állandók), akkor az új mozgásegyenlet a megszokott

$$m \cdot d^2x/dt^2 = -k \cdot x - c \cdot dx/dt$$ alakot ölti.

Tehát a <u>nehézségi erő módosítja ugyan az egyensúlyi helyzetet, de más hatása nincs a harmonikus rezgőmozgásra</u>; valamint a rugó l_0 hossza sem játszik közvetlen szerepet. (Közvetett szerepe azonban van, mert az ugyanolyan minőségű, de $2l_0$ hosszúságú rugó rugóállandója fele akkora lesz, mint az l_0 hosszúságú rugóé – ld. rugók soros, ill. párhuzamos kapcsolása.)

3. Matematikai inga

A matematikai inga egy L hosszúságú súlytalan, nyújthatatlan fonálból és rá erősített M tömegpontból áll. A tömegpont általánosan a felfüggesztési pont körüli L sugarú gömbön mozoghat, és mozgása elég bonyolult lehet. Két speciális esetet szokás vizsgálni, amikor a mozgása könnyen leírható: a síkingát és a kúpingát.

3.1. Síkinga

A tömegpont ebben az esetben egy állandó, függőleges síkban mozog.

Jelölje α a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét. A test mozgásegyenlete, figyelembe véve, hogy a tangenciális gyorsulás $a_t = L \cdot d^2\alpha/dt^2$, valamint hogy a szöggyorsulás és a szög ellenkező irányú:

$$M \cdot L \cdot d^2\alpha/dt^2 = -M \cdot g \cdot \sin\alpha,$$

amit egyszerűsítések után az alábbi alakba írhatunk:

$$d^2\alpha/dt^2 = -(g/L) \cdot \sin\alpha.$$

Ezt a nemlineáris differenciálegyenletet nehéz megoldani. Alkalmazhatjuk azonban az alábbi közelítést:

$$\sin\alpha \approx \alpha,$$

ami 5°-nál csak 0,05 % eltérést okoz, 22°-nál azonban már 1 %-ot, 90°-nál pedig 18 % eltérést.

Így $\sin\alpha$-t α-val helyettesítve a csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás már ismert mozgásegyenletéhez jutunk:

$$d^2\alpha/dt^2 = -\omega^2 \cdot \alpha, \quad \text{aholis } \omega^2 = g/L,$$

azaz az inga olyan lengéseket végez, ahol az α az időnek harmonikus függvénye, és a lengésidő

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g},$$

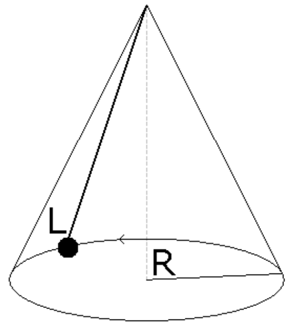
feltéve, hogy a maximális kitérés elég kicsi ahhoz, hogy a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítés alkalmazható.

3.2. Kúpinga

A tömegpont ebben az esetben vízszintes síkban mozog, ennek megfelelően a fonál egy kúpfelületet súrol.

Levezethető, hogy a kúpinga keringési ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{g}},$$



ahol L az inga hossza, R pedig a kör sugara, melyen a tömegpont kering (a kúp alaplapjának a sugara). A formula szerint a <u>nagyobb</u> körön keringő kúpinga <u>hamarabb</u> járja be ezt a nagyobb kört, mint a kisebb sugáron keringő.

4. Torziós inga (szorgalmi)

Egy torziós szálhoz rögzített merev testet (a szálra merőlegesen) forgásba hozva a torziós szál a test forgó mozgását ahhoz hasonlóan lassítja ill. gyorsítja, mint ahogy egy rugó a végéhez rögzített test rezgőmozgását. Így a test a szálra merőleges síkban ide-oda forog, a nyugalmi helyzetétől mért α szögelfordulás az időben harmonikusan változik.
A test mozgásegyenletéhez írjuk fel az impulzusmomentum tételét:

$M = \theta \cdot \beta$, ahol
M a forgatónyomaték,
θ a test tehetetlenségi nyomatéka a torziós szálra mint tengelyre vonatkoztatva,
β pedig a szöggyorsulás: $\beta = d^2\alpha/dt^2$.

A torziós szál által kifejtett forgatónyomaték (amely vissza akarja állítani az elcsavarás előtti állapotot) nagysága arányos a szögelfordulással, és ellentétes irányú avval, azaz

$M = -D \cdot \alpha$,

ahol D egy arányossági tényező (számértékileg az 1 radián szögelforduláshoz tartozó forgatónyomaték), melynek neve direkciós vagy irányító nyomaték.
Ha az impulzusmomentum-tételbe beírjuk a fenti „nyomatéktörvényt” (ami az erőtörvény analógja), akkor megkapjuk a torziós inga mozgásegyenletét:

$\theta \cdot d^2\alpha/dt^2 = -D \cdot \alpha$.

Ez a differenciálegyenlet a $D/\theta = \omega^2$ jelöléssel az ismert alakba írható:

$d^2\alpha/dt^2 = -\omega^2 \cdot \alpha$,

aminek az α szögre nézve a megoldása analóg a harmonikus rezgőmozgáséval:

$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$.

Itt az α_0 és a φ_0 értékét a kezdőállapot határozza meg, a periódusidő pedig

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\theta / D}$.

Mérések

1. Rugóállandó meghatározása

Eszközök:

- állvány, mm-es leolvasásra alkalmas skálával
- rugó
- anyacsavarok mint ismert tömegek
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:
1.1. Különböző terhelések mellett olvassuk le a rugó legalsó pontjának a pozícióját:
Végezzük el a mérést először a PVC rúd nélkül, majd az üres PVC rúddal, végül 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 és 16 anyacsavarral terhelve! (Szükség esetén – ha a rugó gyengébb vagy erősebb – módosítsunk az anyacsavarok számán.)
1.2. Tegyük a PVC rúdra az ismeretlen tömeget (és szükség esetén néhány anyacsavart is), és olvassuk le a rugó legalsó pontjának pozícióját!
Mérjük meg a PVC rúd tömegét a mérlegen.

Kiértékelés:
1.1. Készítsük el a rugó kalibrációs diagramját, azaz ábrázoljuk a rugó legalsó pontjának pozícióját a csavarszám függvényében! A meredekségből számítsuk ki a rugó ’k’ rugóállandóját!
1.2. A diagram alapján határozzuk meg az ismeretlen tömeget!
Szorgalmi feladat: Számítsuk ki a tömegmérés hibáját, abból kiindulva, hogy a leolvasás hibája 1 mm!

2. Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata

Eszközök:
- állvány
- rugó
- anyacsavarok
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- stopper

Mérési feladatok:
2.1. Rakjunk a PVC rúdra 5, majd 10, majd 15 anyacsavart (illetve a rugó terhelhetőségének megfelelő számú anyacsavart), hozzuk rezgésbe a rugót, és mérjük meg a periódusidőt! (10 rezgés idejét mérjük meg!)
2.2. Szorgalmi feladat: Végezzük el a 2.1. mérést az ismeretlen tömeggel is!

Kiértékelés:
2.1. Számoljuk ki a rugóállandót az 5, 10, ill. 15 csavarral mért rezgőmozgás periódusidejéből, és hasonlítsuk össze ezeket az értékeket az 1. mérésben kiszámolt értékkel!
2.2. Szorgalmi feladat: Az ismeretlen tömeggel mért periódusidőből számoljuk ki az ismeretlen tömeget!

Szorgalmi feladat: csillapított rezgőmozgás.
2.3. Mérési feladat (szorgalmi): Mérjük meg két különböző terhelésnél is, hogy kb. mennyi idő alatt csökken a felére a rezgés amplitúdója! (Kvalitatív mérés: csak azt figyeljük meg, hogy melyik csillapodik gyorsabban!)
Kiértékelés (szorgalmi): Magyarázzuk meg az eredményt!

3. Matematikai inga - síkinga

Eszközök:
- állvány
- damilra kötött anyacsavar
- mérőszalag
- stopper

Mérési feladatok:
3.1. Mérjük meg az inga lengésidejét kis kitérések esetén. 10 lengés idejét mérjük! Ismételjük meg a mérést ötször.
Mérjük meg az inga hosszát.
3.2. Ellenőrizzük, hogy kis kitérések esetén a lengésidő független az amplitúdótól, míg igen nagy (közel 90°-os) kitérések esetén a lengésidő valóban változik!

Kiértékelés:
3.1. Számoljuk ki a lengésidőt (T), és a lengésidő hibáját (ΔT) 95 %-os konfidenciaszinten!
A lengésidőből számítsuk ki a g értékét!
Számoljuk ki az alábbi képlettel, mekkora Δg hibával tudjuk meghatározni g értékét:

$$\Delta g = g \cdot \sqrt{\left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}$$

Δl a hosszmérés hibája – ezt becsüljük meg, mennyi lehetett esetünkben.
Ellenőrizzük, hogy a g = 9,81 m/s^2 érték beleesik-e az általunk kiszámolt $g \pm \Delta g$ intervallumba; ha nem, keressünk rá elfogadható magyarázatot!
3.2. Írjuk le, mit tapasztaltunk! Hogyan változik a periódusidő a maximális kitérés függvényében?

4. Matematika inga - kúpinga

Ezt csak kvalitatíve vizsgáljuk meg, mivel ezt a mozgást nehéz létrehozni.

Eszközök:
- damilra kötött anyacsavar
- (stopper)
- (mérőszalag)

Vizsgáljuk meg kísérletileg, miért okoz problémát, hogy pontosan egy kúpfelületen mozogjon a kötél! A kísérletet két hallgató végezze: az egyik tartsa az ingát, a másik próbálja meg megfelelő mozgásba hozni.

Kötelező jegyzőkönyvi feladat nincs.

Szorgalmi feladat:
Vizsgáljuk meg mérésekkel, hogy igaz-e a keringési időt leíró reláció! Két hallgató végezze a mérést: az egyik pörgesse a kúpingát kicsi, ill. nagy sugarú körön, a másik pedig végezze az időmérést! Mindkét esetben a 10 kör megtételéhez szükséges időt mérjük meg.
Kiértékelés:
A 10 kör megtételéhez szükséges időkből számoljuk ki a periódusidőket, majd a formula segítségével a kisebb, ill. nagyobb kör sugarát.

5. Szorgalmi feladat: Torziós inga

Eszközök:
- *állvány*
- *rugó*
- *hengeres műanyag doboz*
- *textilbakelit korongok*
- *stopper*
- *mérőszalag*
- *elektronikus mérleg*

Mérési feladatok:
Mérjük meg a rugóból és annak a végéhez erősített hengeres műanyag dobozból álló torziós inga lengésidejét!
Mérjük meg a lengésidőt úgy is, hogy a doboz aljához a) egy, b) kettő darab textilbakelit korongot erősítünk.
Mérjük meg a korongok tömegét elektronikus mérleggel, a sugarát pedig mérőszalaggal.

Kiértékelés:
Számoljuk ki a korongok tehetetlenségi nyomatékát!
(Korong tehetetlenségi nyomatéka a $\Theta = \frac{1}{2} M \cdot R^2$ formulával számolható.)
Számítsuk ki a doboznak a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!