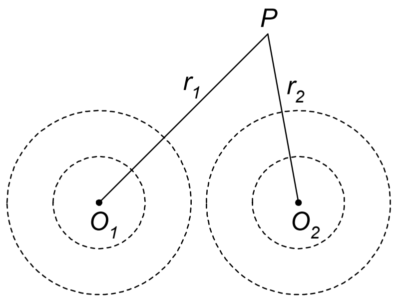
Hullámok találkozása, interferencia

Ha a tér egy pontjában két hullám van jelen, akkor hatásuk ott valamilyen módon összegződik. A hullámok összeadódását *interferenciának* nevezzük.
Mi az interferencia eredménye?
Ha a szuperpozíció elve érvényes (és szélsőséges esetektől eltekintve általában érvényes), akkor adott helyen (**r**), a hullámok által okozott változás (ψ) minden időpillanatban (t) a két hullám által külön-külön okozott változások eredője, vagyis a két hullámfüggvény egyszerűen összeadható:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\psi_1(\mathbf{r},t)+\psi_2(\mathbf{r},t).$$

Két pontforrásban keltett gömbhullám interferenciája

Általános következtetések levonására is alkalmas példaként vizsgáljuk meg két pontforrásból induló (ábra), azonos frekvenciájú, harmonikus gömbhullám vagy körhullám (pl. vízhullámok) interferenciáját. A két hullám hullámfüggvénye:



$$\psi_1(r_1,t)=A_1\cos(\omega t-kr_1)$$

$$\psi_2(r_2,t)=A_2\cos(\omega t-kr_2+\varphi)$$

(φ időben állandónak feltételezett fázisszög).
Az eredő hullám a P pontban a szuperpozíció elve szerint:

$$\psi(P,t)=\psi_1(r_1,t)+\psi_2(r_2,t).$$

Ez áttekinthetőbb alakban írható fel, ha felhasználjuk a rezgések összegzésénél használt összefüggést:

$$A_1\cos(\omega t+\alpha_1)+A_2\cos(\omega t+\alpha_2)=A\cos(\omega t+\alpha)$$

ahol

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)}$$

$$tg\,\alpha=\frac{A_1\sin\alpha_1+A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1+A_2\cos\alpha_2}.$$

Most az $\alpha_1=-kr_1$ és $\alpha_2=-kr_2+\varphi$ fázisszögek adott helyen állandók, így α is az.
Ezzel az eredő hullám:

$$\psi(P,t)=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(kr_1-kr_2+\varphi)}\cdot\cos(\omega t+\alpha),$$

A P pontban tehát ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés lesz (a kifejezés második tényezője), amelynek az amplitúdója (az első tényező) azonban a helytől függ:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(kr_1-kr_2+\varphi)}=A(P)=A(r_1,r_2).$$

Az amplitúdó maximális lesz akkor, ha a négyzetgyök alatti kifejezés maximális, vagyis ha a *cos* értéke éppen $+1$. Ekkor $A_{max}=A_1+A_2$ lesz, vagyis a két hullám amplitudója összeadódik. A *cos* függvény tulajdonságaiból következik, hogy maximális amplitúdó ott alakul ki, ahol

$$kr_1-kr_2+\varphi=\pm n2\pi\ ,$$

vagyis a két hullám $\Delta s_{max}=r_1-r_2$ útkülönbsége:

$$\Delta s_{max} = \pm n\lambda - \frac{\varphi}{2\pi}\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

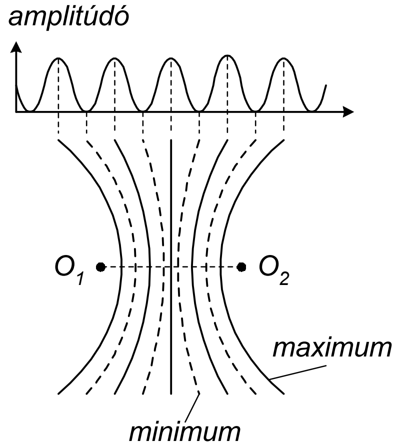
Hasonlóan belátható, hogy a minimális amplitúdó $A_{min} = A_1 - A_2$, amely azokon a helyeken jön létre, ahol

$$\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\pi}\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...).$$

Ha a hullámok között nincs fáziskülönbség ($\varphi=0$), akkor a két feltétel egyszerűbben megfogalmazható: maximális amplitúdó ott jön létre, ahol a két hullám Δs útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse: $\Delta s_{max} = \pm n\lambda$ minimális amplitúdó pedig ott, ahol az útkülönbség a félhullámhossz páratlan számú többszöröse: $\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$.

Az eredő hullám amplitúdójának helyfüggésére vonatkozó összefüggést négyzetre emelve az $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)$ összefüggést kapjuk. Mivel a hullám által szállított energiát jellemző I intenzitás (energiaáram) az amplitúdó négyzetével arányos,

$$I = C \cdot A^2, \qquad I_1 = CA_1^2, \qquad I_2 = CA_2^2.$$



Ezeket az összefüggéseket figyelembe véve fenti egyenletből az intenzitásokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi).$$

Az interferenciánál tehát az eredő hullám I intenzitása nem egyszerűen az interferáló hullámok I_1 és I_2 intenzitásainak összege, hanem megjelenik egy – a helytől és a hullámok fáziskülönbségétől függő – ún. interferencia-tag.

Ha a φ fáziskülönbség időben állandó, akkor a fenti egyenletekből azt kapjuk, hogy a maximális és minimális amplitúdójú (intenzitású) helyek egy-egy időben állandó helyzetű hiperbola-seregen helyezkednek el (ábra). Másrészt az intenzitás helyfüggése a két hullámforrást összekötő egyenessel párhuzamos bármely egyenes mentén maximumok és minimumok sorozatát mutatja (ábra).

Az állandó fáziskülönbségű hullámokat *koherens hullámoknak* nevezik, és koherens hullámok interferenciájánál általánosan is igaz, hogy az interferencia jellegzetes térbeli intenzitás (amplitúdó)-eloszlást ún. *interferenciaképet* eredményez. Ez a hullámok egyik legjellegzetesebb tulajdonsága.

Ha a φ fáziskülönbség időben változik, azaz $\varphi=\varphi(t)$, akkor adott helyen (r_1, r_2) a találkozó hullámok interferenciájának intenzitás-eloszlása is függni fog az időtől

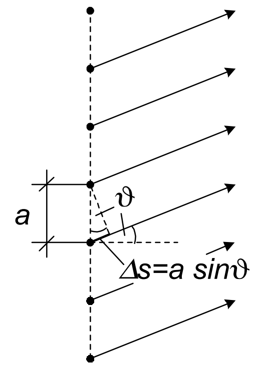
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\left(kr_1 - kr_2 + \varphi(t)\right) = I(r_1, r_2, t),$$

így az intenzitás-eloszlás állandóan változik, és nem figyelhető meg állandósult interferenciakép.

Ha a fáziskülönbség minden szabályszerűség nélkül, véletlenszerűen és a megfigyelő reakcióidejéhez képest gyorsan változik, akkor a megfigyelő az átlagos intenzitást észleli. Mivel ekkor az interferencia-tagban szereplő $\cos\left(kr_1 - kr_2 + \varphi(t)\right)$ időbeli átlaga nulla, a megfigyelt intenzitás a két hullám intenzitásának összege lesz: $I = I_1 + I_2$. Ilyenkor interferenciakép helyett egyenletes intenzitás-eloszlást észlelünk. (Ez az oka annak, hogy két közönséges lámpa fényének interferenciáját nem észleljük: a lámpák fényében a hullámok fáziskülönbsége véletlenszerűen változik.

Sok pontforrásban keltett hullámok interferenciája

Sok pontforrásból induló azonos amplitúdójú gömbhullámok interferenciáját abban az egyszerű esetben vizsgáljuk, amikor a pontforrások egy egyenes mentén egymástól azonos a távolságban helyezkednek el, nincs közöttük fáziskülönbség, és az interferenciát a forrásoktól nagyon nagy (elvileg végtelen) távolságban vizsgáljuk (ábra).



Ilyenkor az egyes pontokból kiinduló hullámok akkor erősítik egymást, ha az útkülönbségük a hullámhossz egész számú többszöröse. Az ábrából látható, hogy ez olyan irányokban teljesül, amelyekre fennáll, hogy

$$\Delta s_n = a \sin \vartheta_n = n\lambda ,$$

azaz

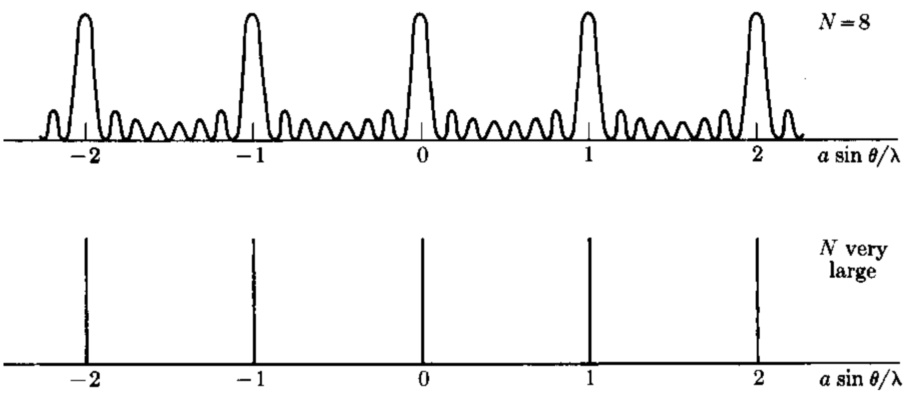
$$\sin \vartheta_n = n \frac{\lambda}{a} .$$

Mivel a hullámok amplitúdója azonos, a maximális amplitúdó – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az egyes amplitúdók összege lesz. Ha N számú, A amplitúdójú pontforrás van, akkor $A_{max}=NA$, ennek megfelelően a maximális intenzitású irányokban az intenzitás

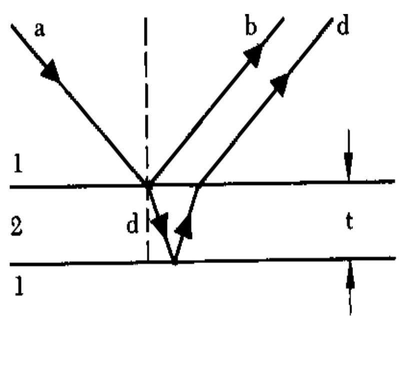
$$I_{max} = N^2 I ,$$

ahol I az egyes forrásokból érkező hullámok intenzitása.

A maximális intenzitású irányok között minimális (esetünkben nulla) intenzitások találhatók, így a pontforrásokat összekötő egyenessel párhuzamosan haladva – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – periodikus térbeli intenzitásváltozásokat észlelünk. Az alábbi ábrán a különböző $n = \frac{a \sin \vartheta}{\lambda}$ értékekhez tartozó maximális intenzitások láthatók különböző számú (N) pontforrás esetén.



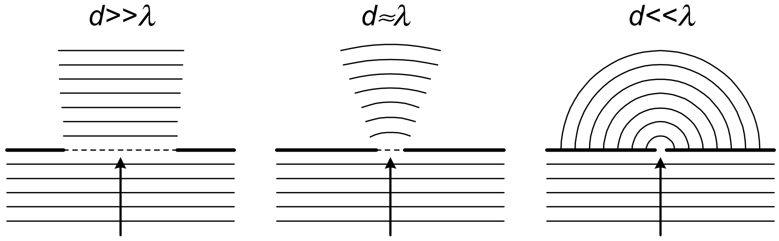
Az intenzitás-eloszlás részletesebb vizsgálatából ugyanis kiderül, hogy a tárgyalt ún. főmaximumok között jóval kisebb intenzitású mellékmaximumok is vannak. Ezek intenzitása a források számának növelésével csökken: a fenti ábra mellékmaximumok nélküli eloszlását igen nagy számú forrás esetén kapjuk.



Az interferencia látványos megnyilvánulása az, hogy vékony hártyákról (pl. olajréteg a víz felületén) visszaverődő fényben színes csíkokat látunk. Ezt a hártya két oldaláról visszaverődő fényhullámok interferenciája okozza (ábra): a hártyáról a szemünkbe érkező *b* és *d* fényhullámok között útkülönbség van, ami adott hullámhossznál, a hártyára megfelelő szög alatt nézve, erősítést jelent az adott hullámhosszra. A hártya különböző pontjairól – tehát különböző szög alatt – a szemünkbe érkező fénynél az erősítés feltétele (az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse) különböző hullámhosszakra teljesül. Ezért látunk különböző színű sávokat.

Hullámelhajlás, a Huygens--Fresnel-elv

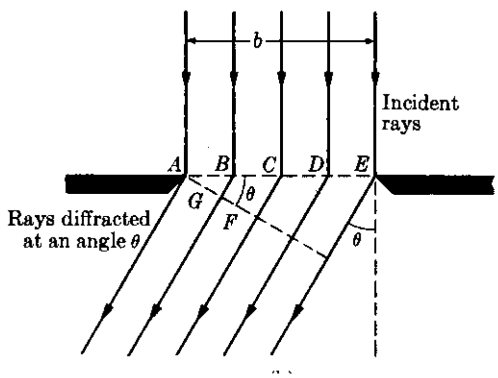
Ha egy hullám réseken halad át vagy akadályok szélénél halad el, akkor olyan jelenségek figyelhetők meg, amelyek a fényre vonatkozó hétköznapi tapasztalatokkal ellentmondásban állnak. Így pl. a keskeny résen áthaladó fény nem az ismert árnyékjelenséget hozza létre, hanem behatol az akadály mögötti térbe is. Ezt a jelenséget fényelhajlásnak – általánosabban, nem csak a fényhullámokra vonatkoztatva – *hullámelhajlásnak* vagy *diffrakciónak* nevezik. Ilyen ún. elhajlásjelenségeket mutat az alábbi ábra.



Az elhajlásjelenségek a Huygens-elvvel már nem értelmezhetők: az árnyékjelenség és a hullám részleges behatolása az árnyéktérbe csak úgy magyarázható, ha az új hullámfrontot nem az elemi hullámok burkolójaként értelmezzük, hanem az *elemi hullámok interferenciájából* számítjuk ki. Ez a *Huygens--Fresnel-elv*. Ilyen számításokból kiderül, hogy az árnyékjelenség oka az, hogy az elemi hullámok a rés túloldalán az "árnyéktérben" – a rés méretétől függő mértékben – kioltják egymást.

Diffrakció hosszú, keskeny résen

A diffrakciót első példaként egy keskeny résen áthaladó hullám esetén vizsgáljuk meg (ábra). Itt tulajdonképpen arról van szó, hogy a réshez megérkező hullámfront minden pontjából kiinduló elemi gömbhullámok interferenciáját vizsgáljuk meg, és ismét feltételezzük, hogy az interferencia eredményét aréstől nagyon távoli pontokban szemléljük.



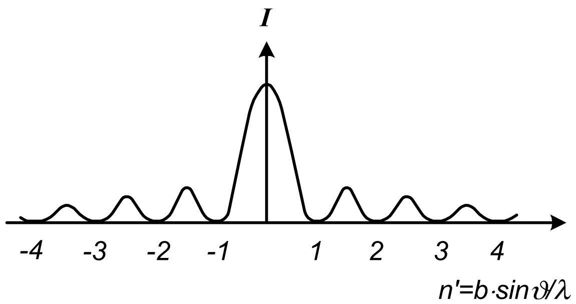
A számítást az nehezíti, hogy végtelen sok pontforrás interferenciáját kell figyelembe venni, de a minimális intenzitásnak megfelelő irányok (ezekben az elemi hullámok gyengítik egymást) viszonylag egyszerűen meghatározhatók. A számítás végeredménye az, hogy minimális intenzitás olyan irányokban jön létre, amelyekre fennáll a

$$b \sin\vartheta = n'\lambda$$

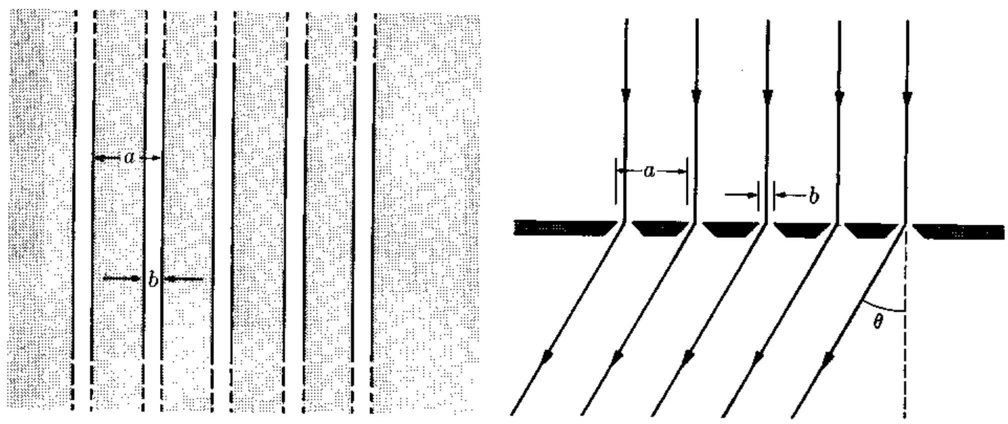
összefüggés, ahol *b* a rés szélessége, n' pedig egész szám ($n' \neq 0$).

Az $n' = 0$ irányban nyilván maximum van, hiszen ebben az irányban a hullámok között nincs útkülönbség, a fenti egyenlet által megadott minimumhelyek között pedig további maximumok vannak, amelyek a főmaximumtól távolodva egyre kisebbek. A

mellékelt ábrán az egyes n' értékekhez tartozó intenzitások láthatók, amelyek a fenti összefüggésnek megfelelő irányokban jelennek meg.
Ha tehát egy keskeny (a hullámhosszal összemérhető szélességű) résen áthaladt fényt egy ernyőre ejtjük, akkor az ernyőn középen erős világos csíkot, ennek két oldalán pedig egymástól sötét csikkal elválasztott, egyre halványabb világos csíkokat látunk.



A diffrakciós rács
Gyakorlatilag is fontos eset az, amikor a hullám egymástól áthatolhatatlan akadályokkal elválasztott rések sorozatán – ún. *rácson* – halad át. Az *(a)* ábra felülnézetben, a *(b)* ábra pedig oldalnézetben mutat egy rácsot. A rések egymástól

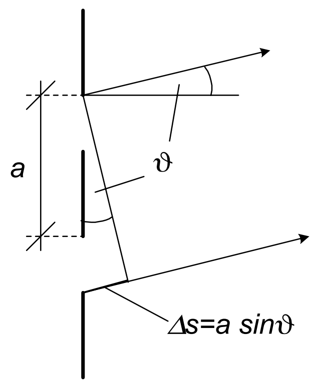


(a) (b)

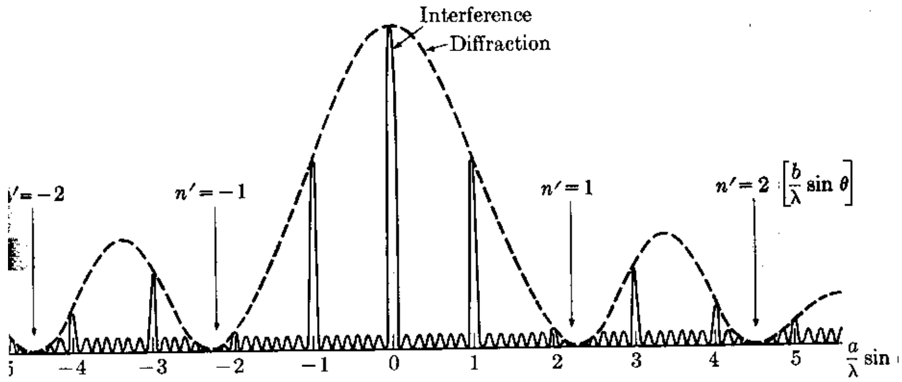
mért távolsága a, amit rácsállandónak neveznek, a rések szélessége b.
A rácson áthaladt hullámban a ráccsal párhuzamos, a résekre merőleges irányban kialakuló intenzitás-eloszlást itt is az egyes résekből jövő elemi hullámok interferenciája adja meg. A részletes számolást nem végezzük el, csak a végeredményt értelmezzük kvalitatív módon.
A különböző rések azonos helyzetű pontjaiból (pl. a rések tetejéről) kiinduló hullámokat páronként megvizsgálva (ábra), az erősítés feltétele az, hogy a hullámok közötti útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse legyen: $\Delta s = n\lambda$. Az ábra jelöléseivel ez azt jelenti, hogy – a pontforrások interferenciájához hasonlóan – a

$$a \sin \vartheta_n = n\lambda \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

feltételnek kell teljesülni. Ez a pontforrás-szerű interferencia (a a rések távolsága!) periodikus intenzitáseloszlást eredményezne, a feltételnek megfelelő irányokban azonos fő intenzitásmaximumokkal.



A következő ábra a részletes számolás eredményeként kapott intenzitáseloszlást mutatja. A pontforrás-modellből kiszámolt maximumok a vizszintes tengelyen feltüntetett $n = \dfrac{a \sin \vartheta}{\lambda}$ számoknál láthatók, de a pontforrásoknál kapott azonos magasságú maximumok helyett csökkenő magasságú csúcsok jelennek meg.



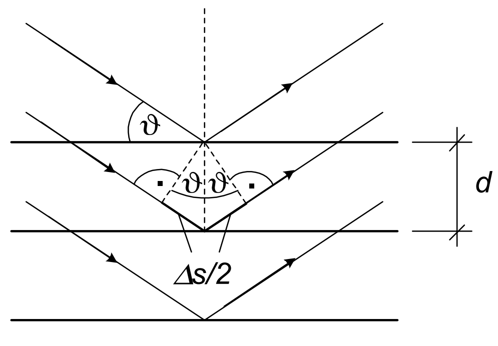
Ezt az eltérést a korábban tárgyalt diffrakció okozza, ami miatt a véges méretű résen való áthaladásnál az elemi hullámok interferenciája a középső maximumtól távolodva csökkenő intenzitású maximumokat eredményez. Az ábrán ezt az eloszlást szaggatott görbe mutatja. Mivel a diffrakció hatása minden résnél jelentkezik, ez módosítja a pontforrások interferenciájának megfelelő képet: az azonos magasságú intenzitásmaximumok helyett a diffrakciónak megfelelő magasságú maximumokat kapunk, vagyis a két eloszlás eredője jelenik meg

Az összefüggésből az *a* rácsállandó ismeretében a hullámhossz meghatározható, a hullámhossz ismeretében viszont a rácsállandó számítható ki.

A rácson való elhajlás a hullámok jellegzetes tulajdonsága. Előfordul, hogy egy jelenség hullámtermészetének bizonyítékául éppen az szolgál, hogy megfelelő rácson elhajlást mutat.

Röntgensugarak elhajlása kristályban

Azt a lehetőséget, hogy egy ismert hullámhosszú hullámnak rácson való elhajlása (diffrakciója) alapján a rácsállandó meghatározható, a gyakorlatban a kristályok szerkezetének vizsgálatára használják (röntgendiffrakciós módszer). A kristályra röntgensugárzást bocsátanak, ami a rácsban szabályos rendben elhelyezkedő atomok által alkotott rácssíkokról visszaverődik. A szomszédos, párhuzamos rácssíkokról visszavert hullámok között útkülönbség jön létre (ábra), ezért az interferencia következtében bizonyos irányokban intenzitásmaximumokat észlelünk. A hullámok akkor erősítik egymást, ha a Δs útkülönbségükre fennáll, hogy $\Delta s = n\lambda$ (*n* egész szám). Az ábra alapján látható, hogy erősítés olyan ϑ irányokban jön létre, amelyre



$$2d \sin\vartheta = n\lambda ,$$

(*d* a párhuzamos rácssíkok távolsága). Ez a Bragg-egyenlet.

Ha a maximális intenzitás irányait meghatározzuk, akkor az erősítés feltételét felhasználva a rácssíkok *d* távolsága kiszámítható.

Gyakran előfordul az is, hogy ismeretlen röntgensugárzás hullámhosszát kell meghatározni. Ilyenkor a sugárzást ismert rácssík-távolságú kristályra kell bocsátani, és meghatározni az intenzitásmaximumok irányát. Ismerve a síktávolságot és lemérve a maximális intenzitásokhoz tartozó szögeket a sugárzás hullámhossza meghatározható. Így módunk van ismeretlen sugárzás spektrumának felvételére is (röntgenspektrométer).