Elektromágneses rezgések

A *rezgés* általános értelemben valamilyen mennyiség értékének bizonyos határok közötti – periodikus vagy nem periodikus – ingadozását jelenti. Mivel az ilyen típusú jelenségek rendkívül gyakoriak, a rezgésekkel külön is érdemes foglalkozni. Fontos, hogy a fizikában rezgés alatt nem csak a hétköznapi értelemben rezgésnek nevezett – általában mechanikai mozgással összekapcsolt – jelenségeket értjük, hanem bármilyen mennyiség "rezgés-típusú" változását. Korábban megismerkedtek a mechanikai rezgésekkel, most az elektromágneses rezgéseket tárgyaljuk.

Szabad elektromágneses rezgések

Szabad rezgésről akkor beszélünk, ha a rezgésre képes rendszert a rezgés elindulása után magára hagyjuk. Ilyen rezgés jön létre például, ha egy rugóra felfüggesztett tömeget az egyensúlyi helyzetéből kimozdítunk, és magára hagyjuk, vagy egy kondenzátort és tekercset tartalmazó elektromos rezgőkörben a kondenzátort feltöltjük és a rendszert magára hagyjuk.
Az alábbiakban szabad elektromágneses rezgéseket vizsgálunk. Először az energiaveszteség nélkülinek feltételezett ideális, harmonikus rezgésekkel-, majd az energiaveszteség miatt csillapodó rezgésekkel foglalkozunk.

Szabad harmonikus rezgések

Definíció szerint a *harmonikus rezgés* egy mennyiség olyan változása, amelynek időfüggése harmonikus (szinusz- vagy koszinusz) függvénnyel írható le. Kísérletileg szabad harmonikus rezgést nem könnyű bemutatni, mivel a valóságban a szabad rezgések kisebb-nagyobb mértékben mindig csillapodnak. Közelítőleg harmonikus rezgést azonban megvalósíthatunk.

A harmonikus rezgést leíró függvény

Az x-tengelyen mozgó tömegpont akkor végez harmonikus rezgőmozgást, ha koordinátájának időfüggését az

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad \text{vagy} \qquad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

típusú függvény írja le, ahol A a legnagyobb kitérés értéke, amit a rezgés *amplitúdójának* neveznek, ω_0 a rezgés T_0 *rezgésidejét* (egy periódus hosszát) meghatározó körfrekvencia ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$), φ pedig az időmérés kezdetétől függő *fázisállandó*.

A rezgések jellemzésére gyakran használt f_0 *frekvencia* számértéke az egységnyi idő alatt lezajló rezgési periódusok száma, amely a fenti jellemzőkkel az $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ összefüggésben van. A továbbiakban általában a körfrekvenciát használjuk, de ebből a vele arányos frekvencia a fenti összefüggés segítségével mindig megkapható.

Korábban már szó volt arról, hogy a harmonikus rezgés nem csak rezgőmozgást jelent. Harmonikus rezgésről beszélünk akkor is, ha egy áramkörben mért I áramerősség- vagy U feszültség időbeli változása például az

$$I(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$U(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

összefüggésekkel adható meg (itt I_m és U_m az áramerősség- illetve feszültség maximális értékét megadó *áramerősség-* illetve *feszültség-amplitúdó*).

Ha a szögek összegének szinuszára (koszinuszára) vonatkozó ismert trigonometriai összefüggést alkalmazzuk, akkor a fenti kifejezéseket fázisszög bevezetése nélkül is felírhatjuk. Ez például az $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ rezgés esetében az alábbi módon történhet:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\sin\omega_0 t\cos\varphi + A\cos\omega_0 t\sin\varphi .$$

Bevezetve a $B = A\cos\varphi,\ \ C = A\sin\varphi$ jelöléseket, a harmonikus rezgést leíró függvény az alábbi (az eredetivel egyenértékű) alakba írható:

$$x(t) = B\sin\omega_0 t + C\cos\omega_0 t .$$

A harmonikus rezgés alapegyenlete

A mechanikában láttuk, hogy ha egy folyamatban egy *f(t)* mennyiség változására fizikai meggondolások alapján egy

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + Kf(t) = 0 ,$$

alakú differenciálegyenletet kapunk, akkor minden további matematikai elemzés nélkül állíthatjuk, hogy a mennyiség változása harmonikus rezgés, amit az

$$f(t) = f_m \sin(\sqrt{K}t + \varphi) = f_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

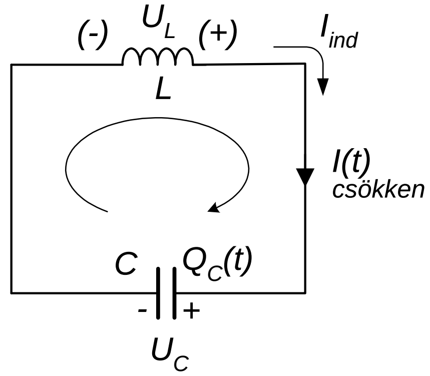
vagy az

$$f(t) = f_m \cos(\sqrt{K}t + \varphi') = f_m \cos(\omega_0 t + \varphi') .$$

függvénnyel írhatunk le. Itt f_m a mennyiség maximális értéke, $\omega_0 = \sqrt{K}$ pedig a rezgés körfrekvenciája.

Mivel a fenti differenciálegyenlet megoldása harmonikus függvény, az ilyen típusú egyenletet a *harmonikus rezgés differenciálegyenletének* vagy a *harmonikus rezgés alapegyenletének* nevezik.

Harmonikus rezgés ideális elektromos rezgőkörben



Ha egy *C* kapacitású, feltöltött kondenzátorra rákapcsolunk egy *L* önindukciójú tekercset (ábra), akkor a körben áram indul meg. A változó áram feszültséget indukál a tekercsben, ami fékezi az áram változását. Ahogy a kondenzátor töltése csökken, az áramerősség is csökkenne, de a tekercs önindukciója ezt a csökkenést lassítja, és akkor is tovább folyik az áram, amikor a kondenzátoron már nincs töltés. Mire az áram megszűnik, a kondenzátor már ellenkező előjelű töltésre tett szert, ami ellenkező irányú áramot indít, stb. Úgy látszik tehát, hogy itt rezgés jön létre, amelynek során az áramerősség a körben periodikusan változik, ezért ezt az áramkört *rezgőkörnek* nevezik.

Ennek a rezgőkörnek van egy különlegessége, hiszen – amint az ábrán is látható – feltételeztük, hogy az áramkörben nincs ellenállás. Ez a valóságban biztosan nincs így (legfeljebb annyit állíthatunk, hogy az ellenállás elhanyagolható), ezért az ilyen rezgőkört *ideális rezgőkörnek* nevezik.

A rezgőkörben folyó áram kísérleti vizsgálata azt mutatja, hogy az áram változása jó közelítéssel harmonikus rezgés. Most megpróbáljuk az áramerősség időfüggését fizikai megfontolások segítségével számítás útján meghatározni. Ehhez az áramkörökre vonatkozó törvényeket használhatjuk fel. A tapasztalat szerint ugyanis nem túl gyorsan változó (ún. kvázistacionárius) áramoknál az áramok és feszültségek pillanatnyi értékeire érvényesek a Kirchhoff-törvények. Ez azt jelenti, hogy egy *adott időpillanatban* a rezgőkör minden pontján ugyanaz az áram folyik (I. törvény), és *adott időpillanatban* a hurokban a feszültségek összege nulla (II. törvény). Írjuk fel Kirchhoff II. törvényét a rezgőkörre a *t* időpillanatban:

$$U_L(t)+U_C(t)=0\,.$$

Tudjuk, hogy az induktivitáson fellépő indukált feszültség és a kapacitáson fellépő feszültség abszolút értékét az $\left|U_L(t)\right|=L\left|\frac{dI(t)}{dt}\right|$ illetve az $\left|U_C(t)\right|=\left|\frac{Q_C(t)}{C}\right|$ összefüggés adja meg. A Kirchhoff-törvény alkalmazásánál ezeket a feszültségeket előjelhelyesen és lehetőleg abszolút érték-jel nélkül kell beírnunk, ami nem túl bonyolult elemzéssel megvalósítható.

******************** ******************** *******************

A Kirchhoff-törvénynek a konkrét áramkör adatait tartalmazó alakját akkor tudjuk felírni, ha sikerül meghatároznunk a feszültségek előjelét. Ehhez egy konkrét helyzetet kell megvizsgálnunk, amit pl. a fenti ábrán láthatunk.

Feltételezzük, hogy a vizsgált pillanatban a kondenzátor az ábrának megfelelő Q_C töltéssel rendelkezik, az I áram az ábrán bejelölt irányban folyik (a kondenzátort tölti), és éppen *csökken*. Emiatt az induktivitáson – a Lenz-törvénynek megfelelően – olyan feszültségnek kell keletkeznie, amely az áram csökkenését akadályozza, vagyis az eredeti árammal egyirányú I_{ind} áramot kelt. Ha az induktivitást feszültségforrásként képzeljük el, akkor az említett feltételnek az a polaritás felel meg, amit az ábrán zárójelben megadtunk (baloldalt a negatív-, jobboldalt a pozitív sarok). Ezután az áramhurkot az áram irányában körbejárva, megállapíthatjuk a feszültségek előjelét. Az induktivitáson áthaladva a potenciál nő, tehát a feszültség (potenciálkülönbség) pozitív, a kapacitáson áthaladva a potenciál csökken, vagyis a feszültség (potenciálkülönbség) negatív. Az induktivitáson eső feszültségre akkor kapunk pozitív értéket, ha az $U_L(t)=-L\frac{dI(t)}{dt}$ összefüggést használjuk (a mínusz jel azért kell, mert az áram csökken, tehát $dI<0$). Ha Q_C a kapacitáson lévő töltés nagyságát jelöli, akkor a rajta eső negatív feszültséget előjelhelyesen az $U_C(t)=-\frac{Q_C(t)}{C}$ összefüggés adja meg.

Így a rezgőkörben végbemenő folyamatok leírására a

$$-L\frac{dI(t)}{dt}-\frac{Q_C(t)}{C}=0$$

egyenletet kapjuk.

Megjegyezzük, hogy ugyanezt az egyenletet kapjuk akkor is, ha más – fizikailag lehetséges – pillanatnyi helyzetet tételezünk fel.

******************** ******************** *******************

Az induktivitáson és a kapacitáson eső feszültségek előjelhelyes beírása után a törvény a

$$-L\frac{dI(t)}{dt}-\frac{Q_C(t)}{C}=0 \qquad \text{illetve az} \qquad L\frac{dI(t)}{dt}+\frac{Q_C(t)}{C}=0$$

alakot ölti.

Az egyenletben két ismeretlen függvény, az áramerősség és a kondenzátor töltése szerepel, ezért valamelyiket az egyenletből eliminálni kell. Erre az ad lehetőséget, hogy a vezetékben folyó áram a kondenzátor töltésének változásával egyértelmű kapcsolatban van, hiszen a vezető egy keresztmetszetén adott idő alatt az a töltés folyik át, ami a kondenzátor lemezére érkezik. Ezért érvényes az $I(t)=\dfrac{dQ_C(t)}{dt}$ összefüggés.

Az egyenletből legegyszerűbben az áram küszöbölhető ki, ha kifejezzük a töltésváltozás sebességével: $I(t)=\dfrac{dQ_C(t)}{dt} \Rightarrow \dfrac{dI(t)}{dt}=\dfrac{d^2Q_C(t)}{dt^2}$. Ezt behelyettesítve, a töltésre az

$$L\frac{d^2Q_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}Q_C(t)=0$$

illetve a

$$\frac{d^2Q_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q_C(t)=0$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ez láthatólag harmonikus rezgés differenciálegyenlete, vagyis a kondenzátor töltése időben szinusz vagy koszinusz függvény szerint változik. A megoldást felírhatjuk például a

$$Q_C(t)=Q_m\,sin(\omega_0 t+\varphi)$$

alakban, ahol Q_m a töltés maximális értéke (ez esetünkben attól függ, hogy a kondenzátort mennyire töltöttük fel). A rezgés körfrekvenciája (a $Q_C(t)$ függvény szorzójának négyzetgyöke): $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$, amit az ideális *rezgőkör saját körfrekvenciájának* neveznek. Az ennek megfelelő $f_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ mennyiség a *rezgőkör sajátfrekvenciája*.

Egy áramkör esetében általában nem a kondenzátor töltése, hanem a körben folyó áram érdekel bennünket. Az áram időbeli változását legegyszerűbben az áramerősség és a töltésváltozás közötti összefüggés segítségével kaphatjuk meg:

$$I(t)=\frac{dQ_C(t)}{dt}=Q_m\omega_0\,cos(\omega_0 t+\varphi)=\frac{Q_m}{\sqrt{LC}}cos(\omega_0 t+\varphi)\,.$$

Ha az áram maximális értékére bevezetjük az

$$I_m=Q_m\omega_0=\frac{Q_m}{\sqrt{LC}}$$

jelölést, akkor az áramerősség változása az egyszerűbb

$$I(t)=I_m\,cos(\omega_0 t+\varphi)$$

alakba írható.

******************** ******************** *******************

Az áram időbeli változása úgy is megkapható, hogy az eredeti egyenletből a töltést küszöböljük ki. Ehhez differenciáljuk az egyenletet idő szerint, és használjuk ki, hogy $\dfrac{dQ_C}{dt}=I$. Ekkor – rendezés után – az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}I(t)=0\,.$$

Ebből az egyenletből is azt kapjuk, hogy az áram $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgésnek megfelelően változik, és időfüggése például az

$$I(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

függvénnyel írható le.

******************** ******************** *******************

A számításunk tehát igazolja azt a várakozást, hogy a kondenzátor feltöltése után magára hagyott ideális rezgőkörben az áramerősség harmonikus függvény szerint változik, az ideális rezgőkörben *harmonikus rezgés jön létre*. Ez azt jelenti, hogy az egyszer elindított rezgés állandó amplitúdóval elméletileg örökké fennmarad.

A tapasztalat ezzel a következtetéssel nem egyezik, hiszen kísérletileg csak az valósítható meg, hogy egy elhanyagolható ellenállást tartalmazó rezgőkörben a közel harmonikus rezgés hosszú ideig fennmarad, de csillapodik, és előbb-utóbb megszűnik. Ez az ellentmondás azzal az egyszerűsítéssel függ össze, hogy számításainknál használt ideális rezgőkörben elhanyagoltuk az energiát fogyasztó ohmikus ellenállást.

Érdemes a kondenzátor-töltés-, az áramerősség- és a kondenzátoron illetve az induktivitáson kialakuló feszültség időbeli változását összehasonlítani.

A kondenzátoron illetve az induktivitáson eső feszültség változása szintén harmonikus rezgés. A feszültségeket leíró függvények:

$$U_C(t) = \frac{1}{C} Q_C(t) = \frac{Q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$U_L(t) = -U_C(t) = -\frac{Q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

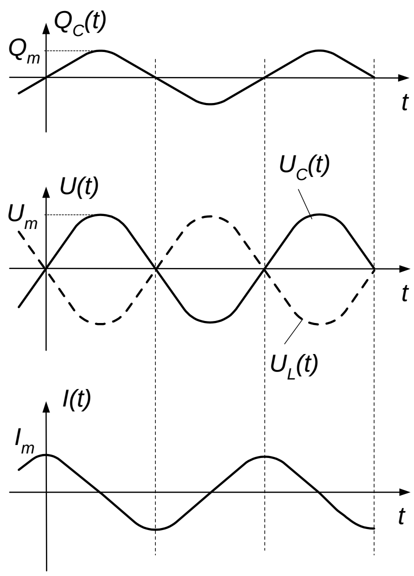
A kondenzátoron eső feszültség tehát a töltéssel azonos fázisban, az induktivitáson eső feszültség azzal ellentétes fázisban változik.

Az áram változását – a fent alkalmazott koszinusz függvény helyett – leírhatjuk szinusz függvénnyel is:

$$I(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Az áramerősség változása tehát $\frac{\pi}{2}$-vel „siet" a kondenzátoron eső feszültség (és a töltés) változásához képest.

A töltés-, a kondenzátoron és induktivitáson eső feszültség- és az áramerősség változását leíró függvényeket a mellékelt ábra mutatja (a $\varphi=0$ feltételezéssel).



A mágneses erőtér energiája

Az elektromos rezgőkörben energiaátalakulások mennek végbe, hiszen a kondenzátor periodikusan elveszti, majd visszakapja az elektromos töltését, és ezzel az elektrosztatikus energiáját is. Kérdés, hogy hol van az energia akkor, amikor a kondenzátorban éppen nincs töltés (és így energia sincs). Az egyetlen lehetőségnek az látszik, hogy ilyenkor az energia a tekercsben felépülő mágneses erőtérben van (az áram akkor maximális, amikor a kondenzátor töltése nulla).

A mágneses erőtér energiájának pontos kifejezését a rezgőkör energiamérlegének vizsgálata alapján kaphatjuk meg. Az energia-mérlegegyenletet formálisan úgy kaphatjuk meg, hogy a rezgőkörre felírt Kirchoff-törvényt beszorozzuk *Idt*-vel:

$$U_L Idt + U_C Idt = 0 .$$

A baloldal második tagja a kondenzátor elektrosztatikus energiájának változását adja meg dt idő alatt ($U_C Idt = U_C dQ$), az első tagot pedig a tekercsben kialakult mágneses erőtér energiájának (E_{magn}) megváltozásaként foghatjuk fel.
A tekercsben kialakult mágneses erőtér energiájának dt idő alatt bekövetkező változása eszerint:

$$dE_{magn} = U_L Idt = L\frac{dI}{dt}Idt = LIdI .$$

Ha a tekercsben az áramot 0-ról I-re növeljük, akkor a teljes energiaváltozás, vagyis az I árammal átjárt tekercs mágneses erőterének energiája

$$E_{magn} = L\int^{I} I'dI' = \frac{1}{2}LI^2 .$$

Figyelembe véve a tekercs mágneses erőterére és önindukciós tényezőjére korábban kapott kifejezéseket, a mágneses erőtér energiája az erőtér jellemzőivel is kifejezhető. Az l hosszúságú, N menetszámú, A keresztmetszetű, μ abszolút permeabilitású anyaggal kitöltött, hosszú, egyenes tekercsben a mágneses indukció $B = \frac{\mu NI}{l}$, egy ilyen tekercs önindukciós együtthatója pedig $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$. Ezekkel I-t és L-et kiküszöbölve, azt kapjuk, hogy

$$E_{magn} = \frac{1}{2\mu}B^2 V = \frac{1}{2}HBV$$

($V=Al$ a tekercs térfogata). Ebből az energia térfogati sűrűsége mágneses erőtérben

$$w_{magn} = \frac{E_{magn}}{V} = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}HB .$$

Ezek a kifejezések nem csak a levezetés alapjául szolgáló speciális esetben, hanem homogén, izotróp anyagban bármilyen mágneses erőtérre érvényesek. Vagyis ahol B indukcióvektorral jellemzett mágneses erőtér van jelen, ott $w_{magn} = \frac{1}{2\mu}B^2$ energiasűrűség is van.

A harmonikus rezgés energiaviszonyai elektromos rezgőkörben

Egy fizikai mennyiség változásai – így a rezgések is – általában energia-átalakulásokkal járnak. Most az elektromágneses harmonikus rezgés energiaviszonyait vizsgáljuk meg.

A rezgőkör energiája minden pillanatban a tekercs mágneses- és a kondenzátor elektrosztatikus energiájának összege:

$$E(t) = E_{magn}(t) + E_{el}(t) =$$

$$= \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}LI_m^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2C}Q_m^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Felhasználva a töltés- és az áramerősség maximális értéke között fennálló $I_m^2 = Q_m^2\omega_0^2 = \frac{Q_m^2}{LC}$ összefüggést, az összenergiára azt kapjuk, hogy

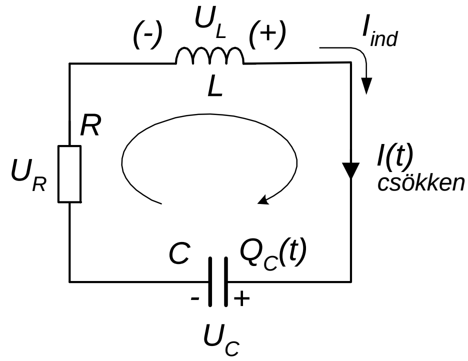
$$E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}\left(sin^2(\omega_0 t + \varphi) + cos^2(\omega_0 t + \varphi)\right) = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \text{állandó}$$

Itt tehát az energiának a mágneses- és az elektromos energiaformák közötti átalakulása megy végbe, miközben az összenergia állandó marad.
Itt is érvényes az a megállapítás, hogy a rezgés energiája arányos az áram illetve a töltés amplitúdójának négyzetével.

A csillapodó rezgés

Az előbb tárgyalt rezgések mindegyike ideális rezgés, mert a rezgés során nincs energiaveszteség. A valóságos rezgéseknél az elektromos- és mágneses energia a rendszerből fokozatosan eltávozik, amiből – az energiára vonatkozó előbbi megállapításaink alapján – következik, hogy a rezgés amplitúdója is csökken. Az ilyen csökkenő amplitúdójú rezgéseket *csillapodó* (vagy *csillapított*) *rezgéseknek* nevezik.

Csillapodó rezgés elektromos rezgőkörben
A valóságos elektromos rezgőkör mindig tartalmaz elektromos ellenállást (ábra), amelyben az elektromos erőtér energiája hővé alakul. Az ellenállás tehát a rezgést csillapítja.
Ennek a csillapításnak nyilvánvaló jele az, hogy egy magára hagyott rezgőkörben a rezgés megszűnik. A jelenség azonban megfelelő kísérletekkel pontosabban is megvizsgálható.



KÍSÉRLET:
- Ha egy ellenállást is tartalmazó rezgőkör ellenállásán eső U_R feszültséget (ami a körben folyó áramerősséggel arányos) katódsugár oszcilloszkópra visszük, akkor az áram amplitúdójának csökkenése pontosan felrajzolható, és a csillapodás az ellenállás nagyságának függvényében is vizsgálható. Azt találjuk, hogy az ellenállás növelésével a csillapodás is nő.

A rezgőkör viselkedésének leírásához most is Kirchhoff II. törvénye segítségével juthatunk el, ami ellenállást is tartalmazó rezgőkörre így írható fel (ábra):

$$U_L + U_C + U_R = 0 .$$

Az ideális rezgőkörnél követett gondolatmenetet megismételve, ebből az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-L\frac{dI(t)}{dt} - \frac{Q_C(t)}{C} - IR = 0$$

(itt egyetlen új tag jelenik meg, az ellenálláson eső feszültség, ami az adott esetben negatív). Az egyenletet (-*L*)-lel végigosztva, az alábbi alakot kapjuk:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q_C(t)}{LC} + \frac{R}{L}I = 0 .$$

Itt ismét felhasználhatjuk a $\frac{dQ_C}{dt} = I$ összefüggést, hogy a töltést vagy az áramerősséget elimináljuk az egyenletből. Mivel általában fontosabb az áramerősség változásának ismerete, most a töltést küszöböljük ki. Ehhez az egyenletet differenciáljuk *t* szerint, és használjuk fel az említett összefüggést. Ekkor az áramerősségre az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = 0 .$$

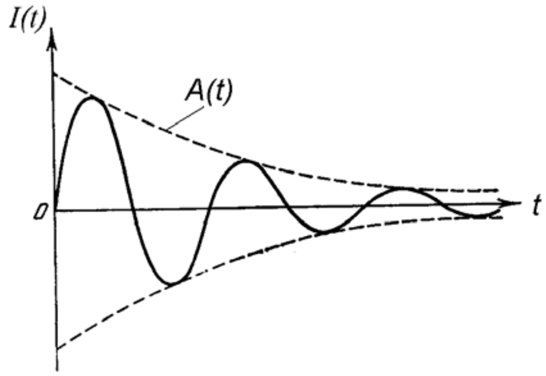
Felhasználva az $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ összefüggést, majd bevezetve a $2\beta = \frac{R}{L}$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\beta\frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0 .$$

Ez pontosan ugyanolyan alakú egyenlet, mint amit a mechanikában a csillapodó mechanikai rezgés kitérésére kaptunk. Ez szemmel láthatóan nem harmonikus rezgés egyenlete (az egyenletben megjelent a függvény első deriváltja is). Ez az eredmény várható volt, hiszen a csillapító tag miatt a rezgés amplitúdója csökken, a csökkenő amplitúdójú rezgés pedig nem írható le egyetlen harmonikus függvénnyel.

A fenti egyenlet matematikai megoldása nem egyszerű feladat, ezért az ún. *próbafüggvény* eljárást alkalmazzuk. Ennek lényege az, hogy a kísérleti tapasztalatok alapján megpróbáljuk kitalálni a megoldást, majd ezt a feltételezett megoldást az egyenletbe behelyettesítjük, és megnézzük, hogy milyen feltételek mellett lesz ez valóban megoldás.

A csillapodó rezgésre vonatkozó kísérletek alapján felrajzolhatjuk egy ilyen rezgés jellegzetes kitérés-idő függését, amit sematikusan az alábbi ábra mutat. Az ábrán szaggatott vonallal az amplitúdó időbeli változását (*A(t)*) is feltüntettük.



A kísérleti görbék azt sugallják, hogy a kitérés időfüggése tulajdonképpen egy torzított harmonikus függvény, amely egy időfüggő (időben csökkenő) amplitúdó és egy harmonikus függvény szorzata:

$$I(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi) .$$

A kísérletek alapján ennél konkrétabb feltevéssel is élhetünk, ugyanis a tapasztalat szerint a vizsgált esetben az amplitúdó csökkenése jól leírható egy exponenciális függvénnyel: $A(t) = I_m e^{-at}$. Itt *a* egyelőre ismeretlen állandó. Ezzel a feltételezett megoldás az

$$I(t) = I_m e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$$

alakot ölti. A probléma csak az, hogy nem tudjuk az *a* állandó értékét, és azt sem, hogy mennyi a harmonikus rész ω körfrekvenciája. Ahhoz, hogy kiderüljön, hogy egy ilyen függvény valóban lehet megoldása a rezgést leíró differenciálegyenletnek, be kell helyettesíteni az egyenletbe. Ebből az is kiderül, hogy milyen *a* és ω érték mellet lehet megoldás a fenti függvény.

A feltételezett megoldásnak a differenciálegyenletbe való behelyettesítésével valóban megkapjuk a keresett két állandót

$$a = \beta = \frac{R}{2L} \text{ és } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}),$$

és ezzel a megoldás

$$I(t) = I_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Eszerint az idővel exponenciálisan csökkenő amplitúdó kitevőjében szereplő állandó éppen az energiaveszteséget okozó ellenállással arányos, a harmonikus rész körfrekvenciája pedig kisebb, mint az ideális rezgőkör csillapítatlan, harmonikus rezgésének megfelelő ω_0 körfrekvencia.

Ez a megoldás visszaadja a csillapodó rezgés kísérletekből már ismert sajátságait: minél nagyobb a csillapításra jellemző β állandó (vagyis minél nagyobb a csillapítás), annál gyorsabban csökken a rezgés amplitúdója, és annál nagyobb a rezgés körfrekvenciájának eltérése a csillapítatlan rezgés körfrekvenciájától. Nagyon kis β érték (kis csillapító hatás) esetén a rezgés közelítőleg harmonikus, körfrekvenciája közelítőleg megegyezik az ideális, csillapítatlan rezgés körfrekvenciájával.

A megoldás most is felírható az

$$I(t) = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi')$$

alakban is.