Harmonikus rezgések összetevése és felbontása

Gyakran előfordul, hogy egy rezgésre képes rendszerben több, közelítőleg harmonikus rezgés egyszerre jelenik meg, és meg kell határoznunk a létrejött eredő rezgést, ezért a harmonikus rezgések összetevésének vizsgálata fontos feladat. A fordított feladat is nagy jelentőségű, amikor egy bonyolult rezgést kell harmonikus összetevőkre bontani.

Harmonikus rezgések összetevése

A rezgések összetevésének néhány jellegzetes és gyakorlatilag is fontos esete az azonos- és különböző frekvenciájú, azonos irányú, továbbá az egymásra merőleges harmonikus rezgések összetevése.

Egyirányú, azonos frekvenciájú harmonikus rezgések összetevése

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor egy rezgő rendszerben egyidejűleg két egyirányú harmonikus rezgés lép fel. A kérdés az, hogy milyen lesz az eredő rezgést megadó függvény.

A két rezgés amplitúdója és fázisa eltérő lehet, de az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a rezgések körfrekvenciája (ω) azonos. A két rezgés kitérésének időfüggését ekkor az alábbi összefüggésekkel adhatjuk meg:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

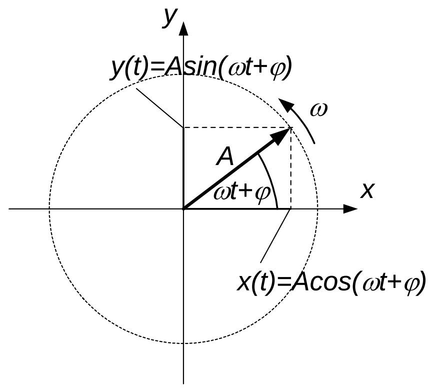
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ha a szuperpozíció elve alkalmazható, akkor a rezgések eredője bármely pillanatban egyszerűen a két rezgés pillanatnyi értékeinek összege:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ebből az alakból nehéz megállapítani az eredő rezgés jellegét, ezért célszerű úgy átalakítani, hogy csak egyetlen trigonometriai függvényt tartalmazzon. Az átalakítást két módszerrel végezhetjük el: trigonometriai összefüggések alapján vagy az ún. *forgó vektoros* módszerrel. Itt az utóbbi eljárást alkalmazzuk, mert egyszerűbb, szemléletesebb, és más problémák tárgyalásánál is hasznos.

A forgó vektoros módszer azon alapszik, hogy egy egyenletes körmozgást végző pontnak a körpálya síkjával párhuzamos vetülete harmonikus rezgést végez. Ezért, ha a rezgés A amplitúdójával azonos hosszúságú vektort az ábrán látható módon, ω állandó szögsebességgel körbeforgatunk, akkor a vektor végpontjának bármelyik tengelyre vett vetülete ω körfrekvenciájú harmonikus rezgést végez. Ha az időmérést abban a pillanatban kezdjük, amikor a vektor az x-tengellyel φ szöget zár be, akkor a t időpillanatban a vektor végpontjának a tengelyekre vett vetülete



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

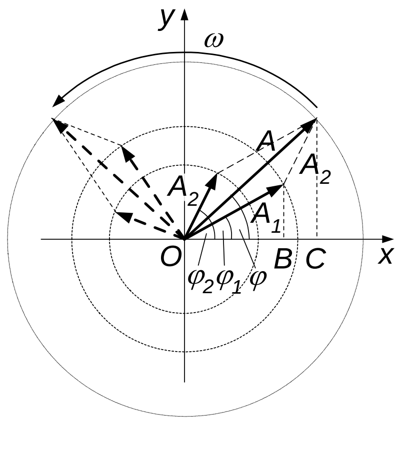
$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

A továbbiakban az x-tengelyre vett vetületet használjuk.

Ha a korábban említett

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

rezgéseket akarjuk összegezni, akkor a megfelelő fázisszöggel mindkét rezgés forgó vektorát felrajzoljuk. Az ábrán a két vektort a *t=0* pillanatban tüntettük fel. Az eredő rezgés forgó vektorát a két összetevő vektor vektori összege adja meg, hiszen az ábra alapján megállapítható, hogy minden pillanatban $x = x_1 + x_2$, ahol $x_1 = OB$, $x_2 = BC$ és $x = OC$. Mivel az eredő vektor az összetevő vektorokkal együtt ω szögsebességgel forog, végpontjának vetülete ugyanilyen körfrekvenciájú harmonikus rezgésnek felel meg. Ez azt jelenti, hogy az eredő rezgés harmonikus, és



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

alakban írható fel, ahol egyelőre nem ismerjük az A amplitúdót és a φ fázisállandót. Ezekre az ábra alapján az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$
$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

******************* ******************* *******************

Az ábra jelöléseivel az amplitúdóra az

$$A^2 = (OC)^2 + (CE)^2 = (OB + BC)^2 + (CD + DE)^2 =$$
$$= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2 + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2 =$$
$$= A_1^2 \cos^2\varphi_1 + A_2^2 \cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 +$$
$$+ A_1^2 \sin^2\varphi_1 + A_2^2 \sin^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) =$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

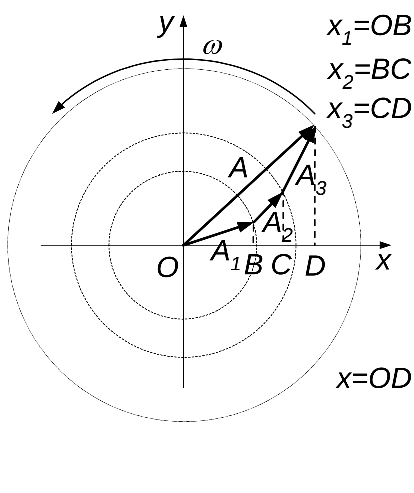
összefüggést kapjuk, amiből a fenti egyenlet gyökvonással kapható.
A fázisszög tangensére fennáll, hogy

$$tg\varphi = \frac{CE}{OC} = \frac{CD + DE}{OB + BC} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2},$$

ami azonos a fent felírt összefüggéssel.

****

Megjegyezzük, hogy a forgóvektoros módszer több egyirányú, azonos körfrekvenciájú rezgés összegzésére is alkalmas. Ilyenkor a vektorokat a parallelogramma módszer helyett a vektoroknak egymás után történő felrajzolásával célszerű összegezni, amint azt 3 vektor esetére a mellékelt ábra mutatja. A vetületekre most is fennáll minden pillanatban, hogy



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t).$$

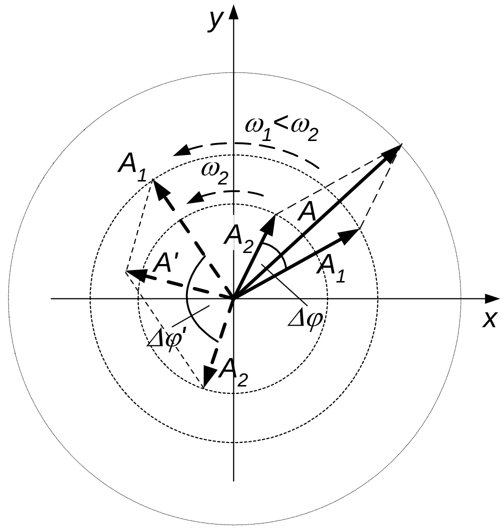
Mivel az eredő vektor együtt forog az összetevőkkel, végpontja harmonikus rezgést végez a közös körfrekvenciával.

********* *********** *********

Azonos irányú, különböző frekvenciájú rezgések összetevése, lebegés

Két azonos irányú, különböző ω_1 és ω_2 frekvenciájú rezgés összegzése jóval bonyolultabb, mint az azonos frekvenciájúaké.

Ez jól érzékelhető, ha az összegzésre a forgó vektoros eljárást akarjuk alkalmazni. Ilyenkor az összetevőket ábrázoló vektorok eltérő szögsebességgel forognak, ezért a rezgések közötti fáziskülönbség és az eredő rezgés amplitúdója is változik az időben (az ábrán $\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi'$ illetve $A \Rightarrow A'$).



Ebben az esetben a forgó vektorok helyett a trigonometriai módszert használjuk egy ω_1 és egy ω_2 frekvenciájú rezgés összegzésére. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rezgések amplitúdója azonos ($A_1 = A_2 = A$), fáziskülönbségük pedig nulla. Ekkor a két rezgés az

$$x_1(t) = A\cos\omega_1 t$$

$$x_2(t) = A\cos\omega_2 t$$

alakba írható. A két rezgés eredője:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t\ .$$

Felhasználva a

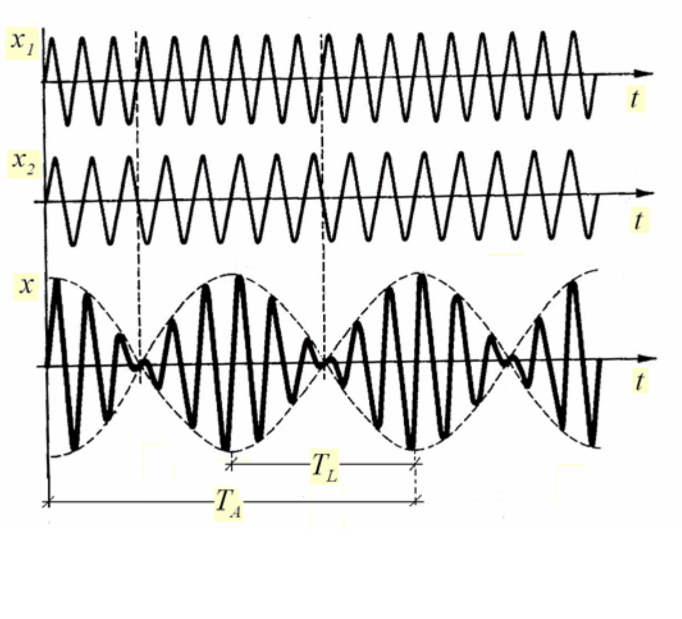
$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 2\cos\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$$

trigonometriai összefüggést, az eredőre azt kapjuk, hogy

$$x(t) = 2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\ .$$

A fenti kifejezés úgy is felfogható, mint egy $\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ frekvenciájú harmonikus rezgés, és egy $\omega_A = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ frekvenciával periodikusan változó $A(t) = 2A\cos\omega_A t$ amplitúdó szorzata:

$$x(t) = 2A\cos\omega_A t\cos\omega' t\ .$$



Ez különösen jól érzékelhető abban a gyakorlatilag is fontos esetben, amikor a két rezgés frekvenciája csak kissé különbözik egymástól. Ilyenkor ugyanis $\omega_A << \omega'$, így az amplitúdó lassan változik, és változása jól nyomon követhető (ábra). Az ábrán feltüntettük a két összetevő

rezgést (x_1 és x_2) és az összegződésük eredményeként előálló eredő rezgést (x) is, amelynek amplitúdója jól láthatóan ingadozik.
Az ilyen periodikusan változó amplitúdójú („lüktető”) rezgést *lebegésnek-*, a maximális kitérés ismétlődési frekvenciáját (f_L) pedig a *lebegés frekvenciájának* nevezik.
Ha a két frekvencia közel azonos, akkor érdemes bevezetni $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ és az $\omega_1 = \omega$ jelölést, amivel $\omega_2 = \omega + \Delta\omega \approx \omega$ hiszen a feltételezés szerint $\Delta\omega << \omega$.
Ezzel $\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \frac{2\omega}{2} = \omega$, $\omega_A = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\Delta\omega}{2}$, és így az eredő rezgés időfüggését megadó összefüggés az alábbi módon alakul

$$x(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\cos\omega t .$$

A lebegés frekvenciájának kiszámításához használjuk fel az ábra jelöléseit. Látható, hogy a lebegés T_L periódusideje éppen fele a koszinusz függvénnyel megadott $A(t)$ amplitúdó T_A periódusidejének:

$$T_L = \frac{T_A}{2} .$$

Ebből következik, hogy a lebegés körfrekvenciája

$$\omega_L = \frac{2\pi}{T_L} = \frac{4\pi}{T_A} = \frac{4\pi}{2\pi}\omega_A = 2\omega_A .$$

Mivel az amplitúdófüggvény körfrekvenciája $\omega_A = \frac{\Delta\omega}{2}$, a lebegés körfrekvenciája

$$\omega_L = \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega .$$

Az $\omega = 2\pi f$ összefüggést felhasználva, ebből azt kapjuk, hogy

$$f_L = f_2 - f_1 = \Delta f ,$$

vagyis a lebegés frekvenciája a két összetevő rezgés frekvenciájának különbségével egyenlő.
Ennek alapján a lebegést fel lehet használni frekvenciák eltérésének megállapítására illetve frekvenciamérésre. Egy hegedűhúr hangolásánál például segíthet, ha megfigyeljük a húr hangjának és a referencia hangnak a lebegését, és a hangolást addig folytatjuk, amíg a lebegés megszűnik. Ez jelzi, hogy a két hang magassága (frekvenciája) megegyezik.
A lebegést több egyszerű kísérlettel bemutathatjuk, amelyek közül itt kettőt ismertetünk.

KÍSÉRLETEK:

– Hatásosan bemutatható a lebegés két kissé különböző frekvenciájú hangvilla egyidejű megszólaltatásával. Ekkor valóban halljuk a hang intenzitásának periodikus változását, lüktetését.
  A kissé eltérő frekvenciát legegyszerűbben úgy állíthatjuk elő, hogy két azonos hangvilla egyikét – egy ráerősített kis súllyal – „elhangoljuk”.
– A lebegés elektromos rezgések esetén könnyen bemutatható katódsugár oszcilloszkóp segítségével, ahol külön látjuk az összetevő rezgések- és az eredő rezgés (lebegés) képét is, ahogy azt a fenti ábrán már bemutattuk.

Merőleges rezgések összetevése

Ha egy rendszerben egyidejűleg két egymásra merőleges irányú rezgés van jelen, akkor ezeket az eredő rezgés két merőleges komponenseként foghatjuk fel, az eredő rezgést tehát az így meghatározott vektor végpontjának mozgása adja meg.

Vizsgáljunk először két azonos frekvenciájú, különböző amplitúdójú rezgést

$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$y(t) = B\cos(\omega t + \delta),$$

amelyek között δ fáziseltolódás van.

Az eredő rezgés pályaegyenletét az idő kiküszöbölésével kapjuk meg. Fejezzük ki az első egyenletből $\cos\omega t$-t, és helyettesítsük be a második egyenletbe, amelyet az összeg koszinuszának kifejtésével és a $\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t}$ összefüggés felhasználásával átalakítunk:

$$\cos\omega t = \frac{x}{A},$$

$$y = B\cos\omega t\cos\delta - B\sin\omega t\sin\delta = B\cos\omega t\cos\delta - B\sin\delta\sqrt{1-\cos^2\omega t},$$

$$y = B\frac{x}{A}\cos\delta - B\sin\delta\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}.$$

Az utolsó egyenlet rendezésével a pálya egyenlete az alábbi alakra hozható:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta = \sin^2\delta .$$

Ez egy ellipszis egyenlete, vagyis az eredő rezgés általában az *xy*-síkban elhelyezkedő ellipszis mentén zajlik. Az ellipszis alakja és helyzete függ a rezgések *A*, *B* amplitúdóitól és a köztük lévő δ fáziskülönbségtől.

A legegyszerűbb eset az, amikor a két rezgés fázisa azonos vagy ellentétes ($\delta = n\pi$, ahol $n = 0, 1, 2...$). Ekkor az egyenlet az

$$\left(\frac{x}{A} \pm \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

alakot ölti, ami azt jelenti, hogy az eredő rezgés az

$$y = \pm\frac{B}{A}x$$

egyenesek mentén ω körfrekvenciával zajló harmonikus rezgés (a „+” jel az azonos-, a „–” jel az ellenkező fázisú rezgésekre vonatkozik).

Egy másik egyszerű eset, amikor a fáziskülönbség $\pi/2$ páratlan számú többszöröse: $\delta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Ekkor az

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

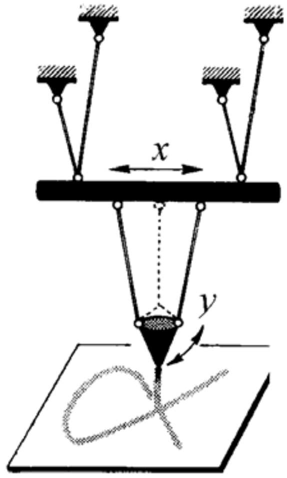
összefüggést kapjuk, vagyis ekkor az ellipszis tengelyei a koordinátatengelyeken vannak. Azonos amplitúdók esetén a pálya ilyenkor kör alakú.

A merőleges rezgések összetevése kísérletileg is bemutatható mind mechanikai- mind pedig elektromágneses rezgések esetén.

A mechanikai rezgés vizsgálatára alkalmas eszköz többféleképpen megvalósítható. Ezek közül egyik lehetséges megoldás a következő.

KÍSÉRLET:

– Az ábrán egy olyan berendezést látunk, amellyel megvalósítható, hogy az eszköz alsó részén látható tölcsér egyidejűleg két egymásra merőleges irányban (*x* és *y*) rezegjen. A tölcsér egyúttal írószerkezetként is szolgál, amely a belőle kifolyó tinta vagy homok segítségével egy papírlapra felrajzolja az eredő rezgésnek megfelelő mozgást végző tölcsér pályáját.

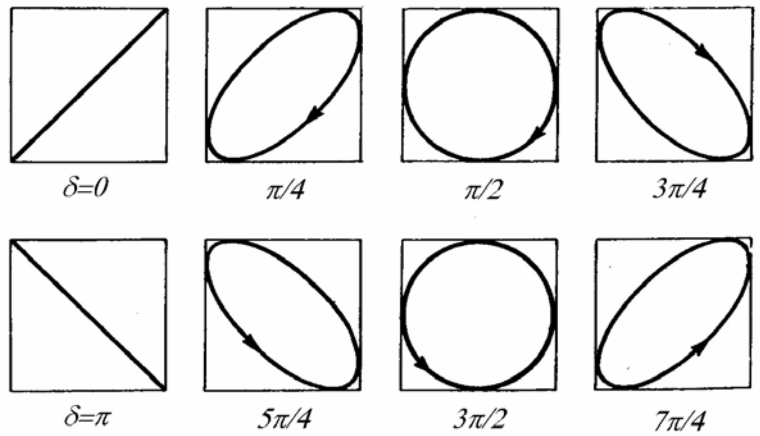


Egyszerűbben megvalósítható az összegzés elektromos rezgések esetén.

KÍSÉRLET:

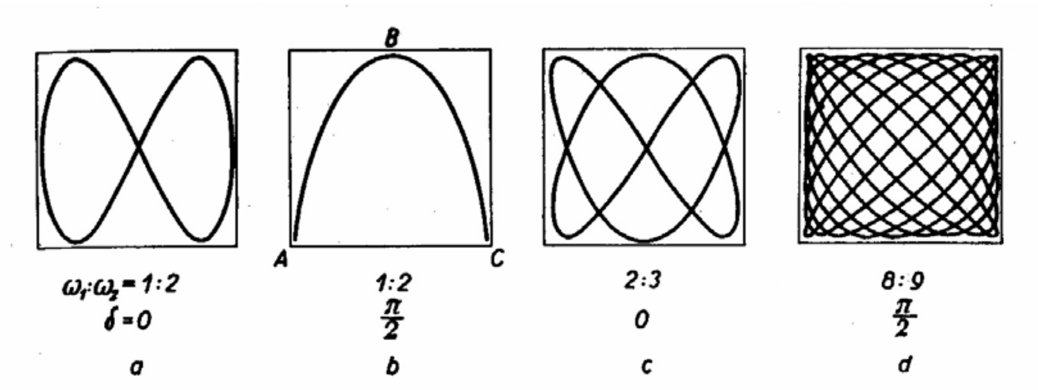
– Elektromos rezgések esetén az összegzése legegyszerűbben katódsugár oszcilloszkóppal végezhető el. Merőleges rezgések úgy állíthatók elő, hogy az egyik váltakozó feszültséget (rezgést) a függőleges- a másikat pedig a vízszintes eltérítő lemezpárra kapcsoljuk. Ennek a módszernek az az előnye, hogy itt az összegzés paraméterei egyszerűen változtathatók, és így a fent tárgyalt különböző esetek könnyen megvalósíthatók.

A fenti kísérletek segítségével (de elméleti úton is) megvizsgálhatók az összegzés különböző esetei. Két merőleges rezgés összegzésénél kapott pályagörbéket mutatunk be az alábbi ábrán azonos frekvenciájú, azonos amplitúdójú rezgéseknél.



További számítások és kísérleti vizsgálatok azt mutatják, hogy ha a merőleges rezgések körfrekvenciája különböző ($\omega_1 \neq \omega_2$), akkor a pálya többnyire igen bonyolult alakú, és általában nem zárt görbe.

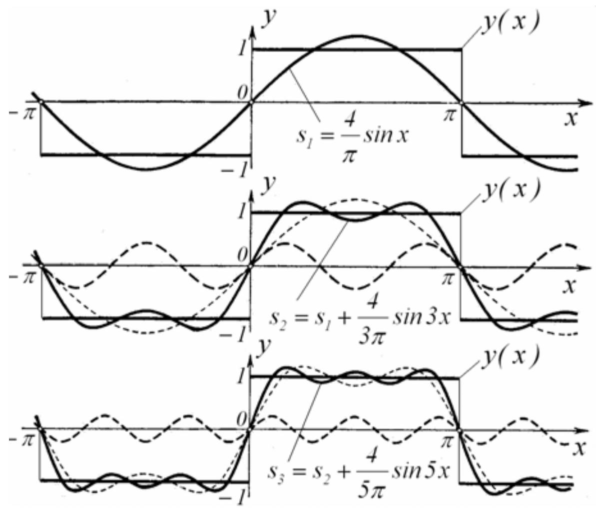
Ha a frekvenciák aránya egész számok arányával adható meg, akkor a pálya zárt, de általában szintén bonyolult görbe. A görbe alakja ilyenkor a frekvenciák arányától függ. Ezeket a jellegzetes görbéket gyakran *Lissajous-görbéknek* nevezik. Az alábbi ábrán néhány ilyen – az eredő rezgés pályáját megadó – Lissajous-görbe látható különböző frekvencia-arányok ($\omega_1 : \omega_2$) és fáziskülönbségek (δ) esetén.



Az ilyen görbék felvétele legegyszerűbb katódsugár oszcilloszkóppal, de a fent vázolt mechanikai rendszerrel is lehetséges.
A görbék vizsgálata azt mutatja, hogy a frekvencia-arány és a görbe alakja között sajátos geometriai összefüggés van. Látható, hogy a zárt pályagörbe érinti a befoglaló négyszög oldalait. Ha megszámoljuk az egyik függőleges és az egyik vízszintes oldalon az érintési pontokat, akkor azt találjuk, hogy az érintési pontok számának aránya megegyezik a körfrekvenciák (frekvenciák) $\omega_1 : \omega_2$ arányával. (A *b* ábrán az egy ciklusnak megfelelő útvonal: *ABCBA*, vagyis a „zárt hurok" a vízszintes oldalt kétszer érinti.) Ezt az összefüggést a gyakorlatban (elsősorban elektromágneses rezgések esetén) frekvenciamérésre lehet használni. Az ismeretlen frekvenciájú rezgést az egyik lemezpárra kapcsoljuk, és összeadjuk az erre merőleges másik lemezpárra kapcsolt, ismert frekvenciájú rezgéssel. A kapott Lissajous-görbe segítségével az ismeretlen frekvencia kiszámítható.

Rezgések felbontása harmonikus rezgések összegére

Említettük, hogy egy nem harmonikus, periodikus rezgés felbontható harmonikus rezgések összegére. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy különböző körfrekvenciájú és amplitúdójú harmonikus rezgéseket (vagyis szinusz és koszinusz függvényeket) adunk össze, aminek eredményeképpen megkapjuk a nem harmonikus rezgést leíró függvényt. A függvény pontos előállításához egy végtelen sort – ún. *Fourier-sort* – kell felírnunk, ha azonban közelítő leírással is megelégszünk, akkor véges számú tagból álló összeget is használhatunk. Ez az eljárás fizikailag azt jelenti, hogy egy nem harmonikus rezgést harmonikus rezgések összegeként állíthatunk elő. Az összeg tagjaiban szereplő harmonikus rezgések *amplitúdóit és körfrekvenciáit* az előállítandó periodikus függvénynek *„megfelelően"* kell megválasztani.



Egy függvénynek Fourier-sorral történő előállítására jól kidolgozott matematikai módszerek állnak rendelkezésre. Ennek részleteivel itt nem foglalkozunk, de szemléltetés céljából bemutatunk egy példát arra, hogy egy periodikus – de nem harmonikus – függvényt hogyan lehet egyre pontosabban előállítani, amint egyre több, megfelelően választott

harmonikus függvényt adunk össze. A példa egy ún. „négyszög-függvény”, amelynek egy periódusát láthatjuk az ábrán (jelölése: $y(x)$). Az ábra felső részén vastag vonallal feltüntettük az első közelítésként használt s_1 részösszeget, ami egyetlen szinusz függvény. Ez elég durván közelíti a négyszögfüggvényt. Ha ehhez hozzáadunk egy megfelelően választott újabb szinusz-tagot, akkor az így kapott s_2 részösszeg már valamivel jobb közelítést ad (ábra középső része, vastag vonal). A harmadik tag hozzáadása után kapott s_3 részösszeg láthatóan még jobban közelíti az $y(x)$ függvényt (ábra alsó része, vastag vonal). Az eljárást tovább folytatva, az összeg egyre jobb közelítést ad.
A vizsgált példa esetében a teljes sor az alábbi módon írható fel:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sin(2k+1)x ,$$

ahol $a_{2k+1} = \dfrac{4}{(2k+1)\pi}$ és k egész szám.

Ha az előállítandó függvény nem periodikus (rezgések esetén például egy egyszeri kitérés), akkor a fenti eljárással nem tudjuk előállítani, de harmonikus függvények integrálja segítségével ilyenkor is megoldható a feladat. Ez lényegét tekintve csak annyiban különbözik a diszkrét tagokból álló összegzéstől, hogy ilyenkor a harmonikus függvény argumentumában szereplő $2k+1$ szám – az előbbi példában $1, 3, 5,\ldots$ – nem diszkrét értékeket vesz fel, hanem folytonosan változik, és az összegzés helyett a folytonos k változó szerint integrálunk. (Rezgések esetén ez azt jelenti, hogy nem diszkrét körfrekvenciájú harmonikus rezgéseket adunk össze, hanem folytonosan változó körfrekvenciára „összegzünk”, azaz integrálunk).