Elektromos áramkörök és hálózatok, Kirchhoff törvényei

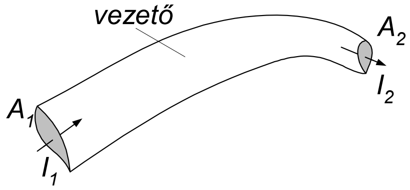
A gyakorlatban az elektromos áram különböző vezetőrendszerekben folyik. Igen fontos, hogy az áramot fenntartó telepek ismeretében a vezetőrendszerek részeiben folyó áramokat számítással is meg tudjuk határozni, hiszen ez teszi lehetővé az áramot felhasználó eszközök megtervezését. A legegyszerűbb eset az, ha az áramot egyetlen zárt hurokból álló *áramkörben* kell vizsgálnunk, az esetek többségében azonban az elektromos áram bonyolult vezetőrendszerekben ún. *hálózatokban* folyik. A hálózatokban rendszerint áramelágazások, más néven *csomópontok* is vannak, a csomópontok közötti vezetőszakaszok, az ún. *ágak* pedig különféle áramköri elemeket (ellenállások, telepek) tartalmaznak. Egy hálózat vizsgálatánál két alapvető kérdés merül fel:

- ♦ Milyen törvény szabja meg, hogy az elágazásoknál az áramerősség hogyan oszlik meg az egyes ágakban?
- ♦ Érvényes-e az elektrosztatika I. alaptörvénye az áramkörökben, és ha érvényes, akkor ennek milyen következményei vannak az áramokra vonatkozóan?

Itt csak olyan áramkörökkel foglalkozunk, amelyekben az áram az áramkör bármely helyén időben nem változik (különböző helyeken az áramerősségek lehetnek eltérőek, de értékük nem változhat meg). Az ilyen áramokat *időben állandó*- vagy *stacionárius áramoknak* nevezzük.

A töltésmegmaradás törvénye időben állandó áramokra, Kirchhoff I. törvénye

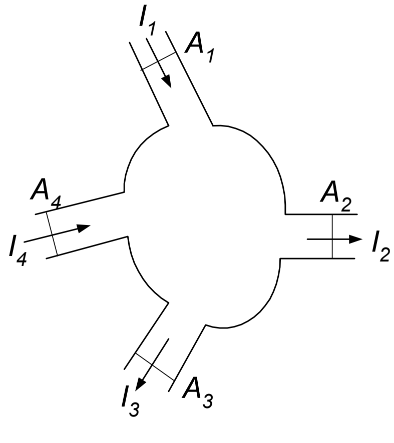
A tapasztalatok azt mutatják, hogy egy vezetőben – különleges körülményektől eltekintve – elektromos töltés nem keletkezik, és nem tűnik el, vagyis a töltés mennyisége megmarad. Ebből következik, hogy ha egy vezetőben időben állandó áram folyik, akkor a vezető egy keresztmetszetén (ábra) Δt idő alatt átment $\Delta Q_1 = I_1 \Delta t$ töltéssel két dolog történhet:



- ♦ A töltés a többi keresztmetszeten (pl. a *2* keresztmetszeten) is ugyanennyi idő alatt megy át, tehát $\Delta Q_1 = I_1 \Delta t = \Delta Q_2 = I_2 \Delta t$. Ez azt jelenti, hogy $I_1 = I_2$, vagyis a vezető minden keresztmetszetén ugyanakkora az áramerősség.
- ♦ A töltés egy része a vezetőnek az *1* és *2* felülete közti térfogatban marad, és a *2* felületen kisebb – de időben állandó – áram megy tovább. Ilyenkor az említett térfogatban a töltés mennyisége időben növekszik, a töltés ott felhalmozódik.

Időben állandó áram csak akkor jöhet létre, ha a vezetőben az elektromos térerősség időben állandó ($I \sim E$). A töltés fokozatos felhalmozódása azonban időben változó erőteret, és így időben változó áramot eredményezne. Ezért időben állandó áram esetén a vezetőben nem lehetséges töltésfelhalmozódás. Ez azt jelenti, hogy a második esetet el kell vetnünk, marad tehát az – a tapasztalat által is megerősített – lehetőség, hogy állandó áram esetén egy vezető bármely két keresztmetszetén ugyanakkora az áramerősség:

$$I_1 = I_2.$$



Hasonló meggondolásokat tehetünk egy csomópont esetében is (ábra), ahol vezetők csatlakoznak egymáshoz. Mivel töltésfelhalmozódás nem lehetséges, itt is érvényes, hogy Δt idő alatt a befolyó áramok (I_1, I_4) által a csomópontba bevitt töltésnek meg kell egyeznie a kifolyó (I_2, I_3) áramok által onnan kivitt töltéssel,

$$I_1\Delta t + I_4\Delta t = I_2\Delta t + I_3\Delta t\,,$$

vagyis

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3\,.$$

Eszerint állandó áramok esetén egy csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével.

Ha az áramoknak előjelet adunk, és a csomópontba befolyó áramokat pozitívnak-, az onnan kifolyó áramokat pedig negatívnak tekintjük (I_1, I_4>0 és I_2, I_3<0), akkor az egyenlet így alakul:

$$I_1 + I_4 + I_2 + I_3 = 0\,.$$

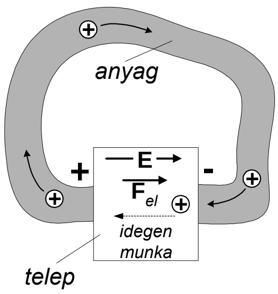
Ezek az összefüggések természetesen akárhány áram esetén érvényesek, vagyis általánosan a

$$\sum_n I_n = 0$$

alakba írhatók. Ez *Kirchhoff I. törvénye*, amely a töltésmegmaradás törvényét fejezi ki. A törvénynek ebbe az alakjába az áramokat – a fenti megállapodás szerint – előjeles mennyiségekként kell behelyettesíteni.

Az elektrosztatika I. alaptörvénye állandó áramokra, Kirchhoff II. törvénye

Korábban megállapítottuk: ahhoz, hogy egy vezetőben állandó áramot tartsunk fenn, egy speciális eszközre (áramforrás, más néven telep) van szükség, ami biztosítja a töltések körforgását (ábra). Ebben az eszközben a töltéseket az ott kialakult $\mathbf{E}$ elektromos erőtérrel, és az általa kifejtett $\mathbf{F}_{el}$ erővel szemben kell mozgatni, ami többnyire valamilyen külső hatás által végzett munka árán valósítható meg. Ez a külső hatás általában az elektromosságtól „idegen” (pl. kémiai) folyamatok felhasználásával működik, ami az elektromosságtanba nehezen építhető be. Ezért a telep működését egy fiktív, elektromos modellel írjuk le.



Egy q töltésnek a telep egyik oldaláról a másikra történő átviteléhez szükséges W^* idegen munkát egy idegen $\mathbf{E}^*$ elektromos térerősség munkájaként fogjuk fel, amit a

$$W^* = \int q\mathbf{E}^*\mathbf{dr} = q\int \mathbf{E}^*\mathbf{dr}$$

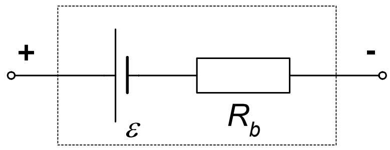
kifejezéssel adunk meg. Látható, hogy ez a munka az átvitt töltés, és egy, a telepre jellemző mennyiség szorzataként írható fel. A telepre jellemző mennyiség ebből úgy kapható meg, hogy az „idegen” munkát elosztjuk az átvitt töltéssel:

$$\varepsilon = \frac{W^*}{q} = \int \mathbf{E}^*\mathbf{dr}\,.$$

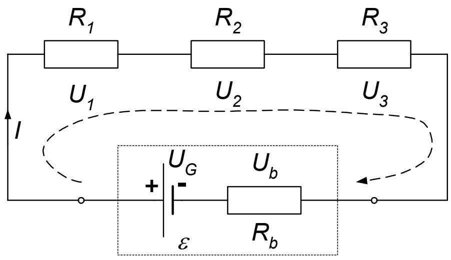
Az így kapott ε jellemzőt a telep *elektromotoros erejének* nevezik. Az elnevezés nem szerencsés, hiszen ε nem erő-, hanem potenciálkülönbség- (feszültség-) jellegű mennyiség, egysége *1 V*. Fontos azonban észrevenni, hogy az elektromotoros erő nem az „idegen” erőtérnek megfelelő potenciálkülönbséggel egyenlő, hanem annak *-1*-szerese. Az $\mathbf{E}^*$ elektromos térerősségnek megfelelő potenciálkülönbség, a definíciónak megfelelően

$$U^* = U_G = -\int \mathbf{E}^*\mathbf{dr} = -\varepsilon\,,$$

amit gyakran *generátorfeszültségnek* neveznek (innen ered az U_G jelölés). A generátorfeszültség és az elektromotoros erő nagysága azonos.
A telep által létrehozott áram magán a telepen is átfolyik, ezért az áramkör vizsgálatánál a telepre kapcsolt vezetők ellenállása mellett a telep saját ellenállását is figyelembe kell venni. Ezért a telepet az áramkörökben úgy modellezik, hogy az a töltésmozgást biztosító ideális elektromotoros erőből (ε) és a telep ellenállását képviselő, ún. *belső ellenállásból* (R_b) áll (ábra).



Egy telepre kapcsolt áramkör rendszerint nagy ellenállású- és az ezeket összekötő, elhanyagolható ellenállású szakaszokból áll. Mivel egy vezető végei közti potenciálkülönbség arányos a vezető ellenállásával, az igen kis ellenállású szakaszok, az ún. *vezetékek* végei közti potenciálkülönbség elhanyagolható a nagy ellenállású szakaszok, az ún. *ellenállások* végei közti potenciálkülönbségek mellett.
A telepek, vezetékek és ellenállások bevezetésével egy egyszerű áramkör az ábrán látható módon rajzolható fel.



Azt a kérdést, hogy az elektrosztatika I. alaptörvénye érvényes-e állandó áramok esetén, a tapasztalat alapján lehet eldönteni. A kísérletek azt mutatják, hogy *az I. alaptörvény teljesül* állandó áramú áramkörök esetén is, vagyis, ha egy áramkörben körbejárunk, és a mért feszültségeket összeadjuk, akkor a teljes körüljárás végén nullát kapunk eredményül. A fenti, egyszerű áramkörben ez azt jelenti, hogy

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_b + U_G = 0\,,$$

ahol a feszültségeket előjelesen kell behelyettesíteni (a feszültség akkor pozitív, ha az áramköri elemen áthaladva a potenciál nő, és akkor negatív, ha az áthaladásnál a potenciál csökken). Ha pl. az áramkört az áram haladásának irányában járjuk körbe (az ábrán a szaggatott vonal jelzi a körüljárást), és I illetve U_G az áram illetve a generátorfeszültség nagyságát jelenti ($I, U_G > 0$), akkor az Ohm-törvény alkalmazásával az egyenlet az alábbi alakot ölti

$$-IR_1 - IR_2 - IR_3 - IR_b + U_G = 0\,.$$

Mivel az áramkörünkben nincs elágazás, az ellenállásokon ugyanaz az áram folyik át (Kirchhoff I. törvénye). Ha bevezetjük az

$$R_1 + R_2 + R_3 = R$$

jelölést, akkor az egyenlet egyszerűbb alakba írható:

$$-IR - IR_b + U_G = 0$$

Itt tehát R a telepen kívüli ellenállások összege az áramkörben, amit külső ellenállásnak is nevezhetünk. Vegyük észre, hogy az áram meghatározása szempontjából az R ellenállás helyettesíti az egymással sorba kapcsolt R_1, R_2 és R_3 ellenállásokat, azok eredőjeként fogható fel.
Az egyenlet felírható még az elektromotoros erő segítségével is, ekkor az

$$-IR - IR_b = \varepsilon$$

alakot kapjuk.
Látható, hogy a körüljárás megváltoztatásával minden feszültség és elektromotoros erő előjele megváltozik, így az egyenlet tetszőleges körüljárás mellett érvényes marad.

Ha az elektrosztatika I. alaptörvénye érvényes az állandó áramokra, akkor a fenti egyenlet egy bonyolult, elágazásokat is tartalmazó hálózatban, tetszőlegesen kiválasztott zárt hurokra is fennáll. A hurkot a csomópontok *ágakra* bontják, amelyeken belül az áram mindenütt ugyanaz. Egy ágon belül az áram mindenütt azonos, de a hurok különböző ágaiban az áramok eltérőek lehetnek. Ezért egy hurokban elvileg annyiféle áram folyhat, amennyi a hurok körüljárásakor érintett ágak száma. Az alábbi ábrán látható hurokra például, a megadott körüljárást követve, a berajzolt áramirányokkal a következő egyenlet írható fel:

$$-I_1R_1+U_{G1}-I_1R_{b1}+U_{G2}-I_2R_2-I_2(R_{b21}+R_{b22})+U_{G3}+I_3(R_{31}+R_{32})+I_3R_{b3}-U_{G4}$$
$$-I_4(R_{41}+R_{42}+R_{43})-I_4R_{b4}-U_{G5}-I_5(R_{51}+R_{52})=0.$$

Ha az előbbi példa mintájára az egyazon ágban lévő külső- és belső ellenállásokat az összegükkel helyettesítjük

$(R_{b21}+R_{b22}=R_{b2}$,

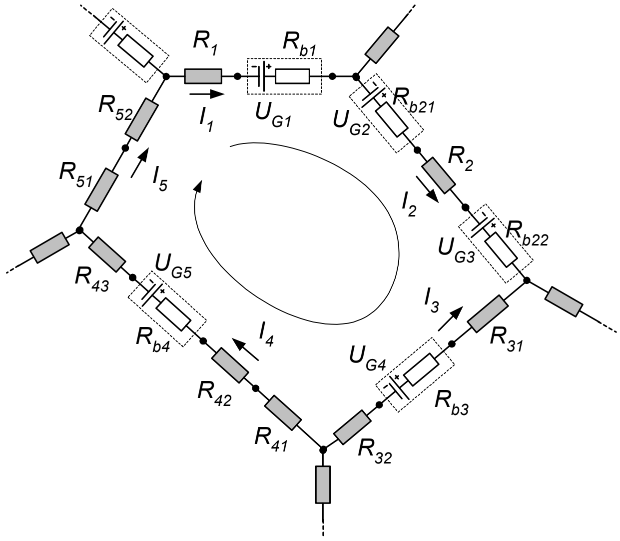
$R_{31}+R_{32}=R_3$,

$R_{41}+R_{42}+R_{43}=R_4$,

$R_{51}+R_{52}=R_5)$,

akkor az egyszerűbb

$$-I_1R_1-I_2R_2+I_3R_3-I_4R_4-I_5R_5-$$
$$-I_1R_{b1}-I_2R_{b2}+I_3R_{b3}-I_4R_{b4}+$$
$$+U_{G1}+U_{G2}+U_{G3}-U_{G4}-U_{G5}=0$$



egyenletet kapjuk.

Általános esetben a törvény tetszőleges zárt hurokra az alábbi módon írható fel:

$$\sum_k I_kR_k+\sum_m I_mR_{bm}+\sum_m U_{Gm}=0,$$

illetve az elektromotoros erőkkel

$$\sum_k I_kR_k+\sum_m I_mR_{bm}=\sum_m \varepsilon_m .$$

Itt R_k a hurok k-adik ellenállása, I_k a k-adik *ellenálláson folyó* áram, U_{Gm} (illetve ε_m) a hurok m-edik telepének generátorfeszültsége (illetve elektromotoros ereje), R_{bm} az m-edik telep belső ellenállása. Ezt a törvényt *Kirchhoff II. törvényének* nevezik.

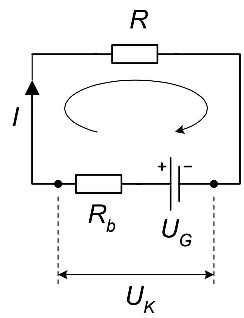
A törvény alkalmazásával kapcsolatban az a gyakorlati probléma merül fel, hogy egy bonyolult hálózatban egy zárt hurok áramainak irányát nem tudjuk előre megmondani. Kimutatható azonban, hogy az áramirányokat tetszőlegesen felvéve, az áramerősségek nagyságára a helyes értéket kapjuk, az áram előjele viszont negatívnak adódik, ha rossz áramirányt tételeztünk fel. Így utólag a helyes áramirányokat is meg tudjuk állapítani.

A két Kirchhoff-törvény segítségével tetszőleges hálózat bármelyik ágában folyó áram kiszámítható, ha a hálózatban ismerjük az ellenállásokat és a telepeket (belső ellenállásukkal és generátorfeszültségükkel).

A Kirchhoff-törvények alkalmazása

Most a csomópontokra érvényes I. törvény, és a hurkokra vonatkozó II. törvény alkalmazását mutatjuk be két egyszerű példán.

Az első esetben egy telephez egyetlen külső ellenállás (*R*) csatlakozik (ábra).



Mivel elágazás nincs, az I. törvényből következik, hogy az áramkör minden pontján ugyanaz az *I* áram folyik.

Körbehaladva az áram irányában (az áramirány és a körüljárás önkényesen választható) a II. törvény szerint a feszültségek összege nulla

$$-IR_b - IR + U_G = 0 .$$

Ebből az áram megkapható:

$$I = \frac{U_G}{R + R_b} .$$

A telep sarkai (kapcsai) közti feszültséget *kapocsfeszültségnek* nevezik, és rendszerint U_K-val jelölik. Ez esetünkben megegyezik a külső ellenállás végei közötti feszültséggel, tehát

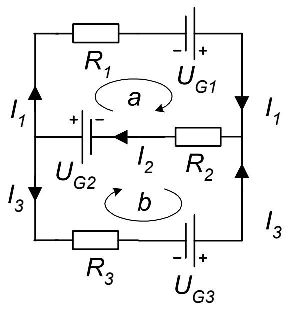
$$U_K = IR .$$

Másrészt a huroktörvény alapján a kapocsfeszültség:

$$U_K = U_G - IR_b .$$

Ebben az egyszerű esetben tehát $U_K < U_G$, vagyis a kapocsfeszültség kisebb, mint a generátorfeszültség (elektromotoros erő). A kettő csak akkor egyezik meg, ha a körben nem folyik áram (*I=0*), mert ekkor a fenti egyenletből azt kapjuk, hogy $U_K = U_G$.

Bonyolultabb áramkör esetén több egyenlet felírása szükséges. Az ábrán látható esetben pl. az áramkör *3* ágból áll. Mivel ág minden pontján azonos az áramerősség, az ábrán látható esetben *3* különböző áramérték lehetséges. Ezek meghatározásához *3* független egyenletre van szükség.



A csomóponti törvényből a baloldali csomópontra azt kapjuk, hogy

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 .$$

A másik csomópontra ugyanez az egyenlet adódik, tehát a csomópontokra csak egy független egyenlet írható fel.

Az ábrán *a*-val jelölt hurokra az

$$-I_1R_1 + U_{T1} - I_2R_2 + U_{G2} = 0$$

egyenletet, a *b*-vel jelölt hurokra pedig az

$$-U_{G2} + I_2R_2 - U_{G3} + I_3R_3 = 0$$

egyenletet kapjuk.

A harmadik lehetséges hurok az áramkör külső kontúrja lenne, de könnyen belátható, hogy az erre felírt hurokegyenlet az *a* és *b* hurokra felírt egyenletek összege, vagyis nem független egyenlet.

Ebben az esetben tehát a *3* ismeretlen áram meghatározásához *3* független egyenletet tudtunk felírni, így az áramértékek meghatározhatók.

Kimutatható, hogy ez általában is így van: mindig annyi független egyenlet írható fel, amennyi az ismeretlen áramok száma.

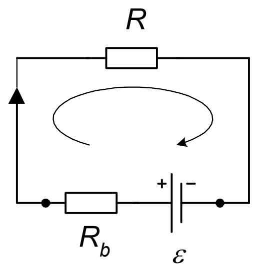
Bonyolultabb hálózatokban általában nem igaz, hogy a kapocsfeszültség mindig kisebb, mint a generátorfeszültség. Ennek az az oka, hogy ilyenkor egy telep belső ellenállásán más telepek által keltett áramok is átfolynak, és az így létrejött feszültség módosítja a kapocsfeszültséget. Ha pl. a telepen a saját áramával ellentétes irányú áram folyik át, akkor a kapocsfeszültség nagyobb lehet, mint az elektromotoros erő.
A Kirchhoff-törvények segítségével számos hasznos összefüggés vezethető le. Így például könnyen bebizonyítható, hogy egymással sorba- vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállások helyettesíthetők egy ellenállással, amelyen átfolyó áram és a végei közt mért feszültség azonos az eredeti ellenállásokon átfolyó árammal és az ellenállássor végei közötti feszültséggel. A megfelelő helyettesítő (eredő) ellenállások az alábbi összefüggésekből kaphatók:

$$R_e^{soros} = \sum_i R_i$$

$$\frac{1}{R_e^{párh}} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

Energiaviszonyok elektromos áramkörben

A vezetőben folyó állandó áramot a telepben zajló idegen folyamat által végzett munka tartja fenn. A töltések mozgatására fordított energia a töltések mozgása során hővé alakul. Ezt az energiamérleget az ábrán látható, egyszerű áramkör vizsgálatával könnyen számszerűsíthetjük.



Az áramkörre korábban felírtuk Kirchhoff II. törvényét, és az

$$\varepsilon = IR + IR_b$$

összefüggést kaptuk. Ebből úgy kapunk Δt időtartamra vonatkozó energiamérleget, hogy megszorozzuk $I\Delta t$-vel. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ telep}}{\varepsilon I\Delta t} = \underset{\substack{\Uparrow \\ hasznos}}{I^2 R\Delta t} + \underset{\substack{\Uparrow \\ elveszett}}{I^2 R_b \Delta t}$$

A baloldalon a telepben működő *idegen hatás* (az ε elektromotoros erő) által Δt idő alatt végzett *munka* ($W_{össz}$) áll, ami a jobboldalon álló munkákra fordítódik. A jobboldal első tagja a külső ellenálláson (az ún. *fogyasztón*) ugyanennyi idő alatt hővé alakuló energia, amit *hasznos munkának* (W_h) neveznek (ezt lehet pl. világításra, fűtésre, motor hajtására használni). A jobboldal második tagja a telepben ugyanezen idő alatt hővé alakult energia, ami nem hasznosítható, ez tehát *elveszett energia* (W_{veszt}). Az energiamérleg ezekkel a jelölésekkel:

$$W_{össz} = W_h + W_{veszt}$$

Hasonló összefüggést kapunk a teljesítményekre is, ha a munkák összefüggését elosztjuk a Δt idővel:

$$\varepsilon I = I^2 R + I^2 R_b .$$

A fenti jelölésekkel a teljesítménymérleg:

$$P_{össz} = P_h + P_{veszt} .$$

Innen kiszámítható az energiahasznosítás hatásfoka:

$$\eta = \frac{P_h}{P_{össz}} = \frac{R}{R + R_b} \quad .$$

Látható, hogy a hatásfok akkor lenne *1*, ha a telepnek nem lenne belső ellenállása. Mivel ez a gyakorlatban nem valósítható meg, a hatásfok mindig kisebb *1*-nél.

Egy telep működésének fontos jellemzője, hogy adott külső ellenállás esetén mennyi a belőle kivehető hasznos teljesítmény. Ezt a

$$P_h = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(R + R_b)^2} R$$

összefüggésből számíthatjuk ki. Látható, hogy a hasznos teljesítmény nem csak a telep adataitól (ε, R_b) függ, hanem az alkalmazott külső ellenállástól is: $P_h = P_h(R)$. Mivel ez a függvény nagy- és kis R értékeknél egyaránt nullához tart, várható, hogy valamilyen R értéknél maximuma van. A maximumhely feltétele a differenciálhányados eltűnése:

$$\frac{dP_h}{dR} = \varepsilon^2 \frac{R_b - R}{(R + R_b)^3} = 0 \, .$$

Maximum tehát akkor van, ha $R = R_b$, vagyis a legnagyobb hasznos teljesítmény akkor vehető ki a telepből, ha a külső ellenállás egyenlő a telep belső ellenállásával. A hasznos teljesítmény növelése érdekében tehát a fogyasztót az ellenállás szempontjából *illeszteni* kell az áramforráshoz.