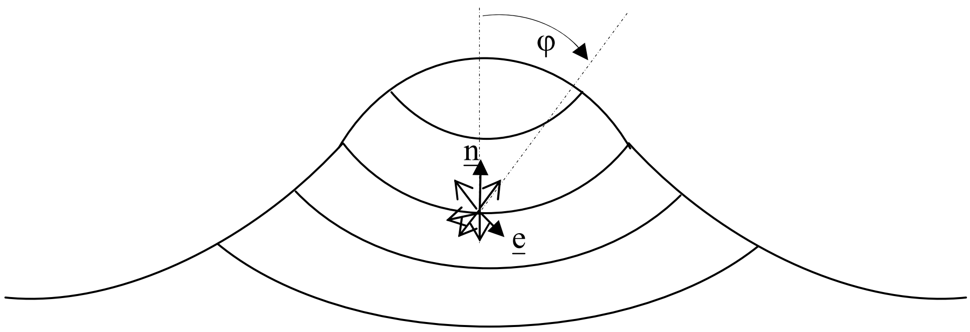
Kísérleti Fizika II : Matematika bevezető

I. Skalár tér gradiense

Legyen $U(\underline{r})$ skalár tér $\left(U \in \mathbb{R} \quad \underline{r} \in \mathbb{R}^n \quad n \geq 2\right)$

Iránymenti derivált: $\dfrac{\partial U}{\partial \underline{e}} := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{U(\underline{r}+\varepsilon \underline{e}) - U(\underline{r})}{\varepsilon}$ $\qquad |\underline{e}| = 1$



$\dfrac{\partial U}{\partial \underline{e}}$ maximális „fölfelé” a nívófelületre merőlegesen ($\underline{n}$ iránya mentén).

A többi irányra: $\dfrac{\partial U}{\partial \underline{e}} = \dfrac{\partial U}{\partial \underline{n}} \cdot \cos\varphi$.

Def.: $\mathrm{grad}(U) = \underline{n} \cdot \dfrac{\partial U(\underline{r})}{\partial \underline{n}}$ $\qquad$ jelölés: $\mathrm{grad}(U(\underline{r})) = \underline{\nabla} U$ (értéke vektor)

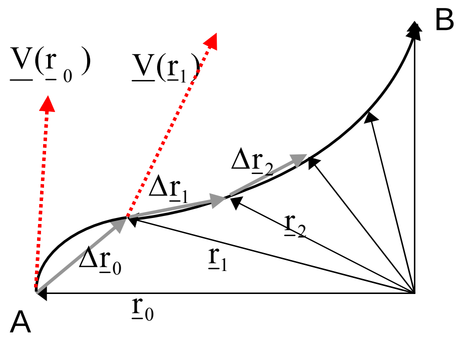
$\left(\dfrac{\partial U}{\partial \underline{e}} = \underline{e} \cdot \mathrm{grad}(U)\right)$

Derékszögű k.r.-ben: $\qquad \mathrm{grad}(U) = \dfrac{\partial U}{\partial x}\underline{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\underline{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\underline{k}$ $\qquad$ (többi kr. lásd Bronstein)

II. Vektortér integrálása

Legyen $\underline{V}(\underline{r})$ vektortér $\left(\underline{V}, \underline{r} \in \mathbb{R}^3\right)$

II.1. Pálya menti integrál vagy vonalintegrál



$$\int_{AB} \underline{V}(\underline{r}) d\underline{r} = \lim_{\substack{|\Delta \underline{r}| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \underline{V}(\underline{r}) \Delta \underline{r}_i \quad \text{(értéke skalár!)}$$

Tipikus példa: erőtér→munka

Konzervatív tér: csak a kezdő és végponttól függ

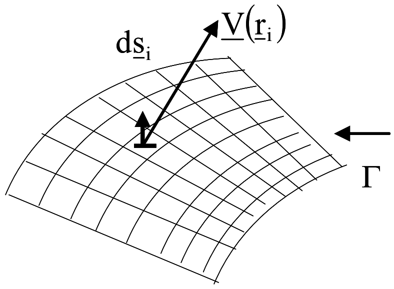
$$\Downarrow$$

$$\oint \underline{V}(\underline{r}) d\underline{r} = 0 \quad \text{(örvénymentes vektortér!)}$$

$$U(\underline{r}) = \int_{\underline{r}_{ref}}^{\underline{r}} \underline{V}(\underline{r}) d\underline{r}' \quad \text{és} \quad \underline{V}(\underline{r}) = \mathrm{grad}[U(\underline{r})]$$

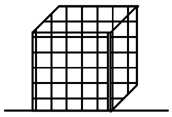
II.2. Felületi integrál:

Vektortér fluxusa $\Phi = \lim\limits_{d\underline{s}_i \to 0} \sum \underline{V}(\underline{r}_i) d\underline{s}_i = \int\limits_{\Gamma} \underline{V}(\underline{r}) d\underline{s}$ (vagy $\iint\limits_{\Gamma} \underline{V}(\underline{r}) d\underline{s}$) (értéke skalár)



Zárt felületre integrálva megadja a zárt térfogatból kiáramló fluxust: $\oiint\limits_{\Gamma} \underline{V}(\underline{r}) d\underline{s} = \Phi_{ki}$

II.3. Térfogati integrál: $\lim\limits_{dV_i \to 0} \sum U(\underline{r}_i) dV_i = \int\limits_{V} U(\underline{r}) dV$ vagy $\iiint\limits_{V} U(\underline{r}) dV$



általában skalár terekre alkalmazzák, ekkor értéke skalár

III. Vektortér differenciálása

III.1. Divergencia (v. forrássűrűség) div $(\underline{V})$, $\underline{\nabla} \cdot \underline{V}$ (értéke skalár)

$$\text{div}\ \underline{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\oiint\limits_{\Gamma} \underline{V} d\underline{s}}{V}$$

forrás sűrűség (∞ kis térfogat zárt felületéből származó fluxus sűrűség)

Derékszögű koordináta rendszer: $\text{div}\ \underline{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$

>0 forrás

<0 nyelő

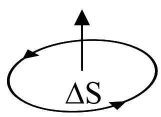
=0 forrásmentes

III.2. Rotáció (Örvényesség) rot $\underline{V}$ curl $(\underline{V})$ $\underline{\nabla} \times \underline{V}$ (értéke vektor)

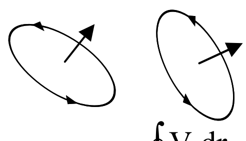
$$\text{def:} \quad \text{rot}\ \underline{V} = -\lim_{V \to 0} \left(\frac{\oiint \underline{V} \times d\underline{s}}{V} \right)$$

Alternatív definíció:

1) Az adott pontra fektetett kis felületre kiszámítjuk a cirkulációt: $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \underline{V} d\underline{r}}{\Delta S}$

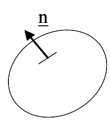


2) Kiszámítjuk „minden” lehetséges felület irányra



…

3) Vesszük azt az irányt $(\underline{n})$, amerre a cirkuláció maximális: $\text{rot}\ \underline{A} = \underline{n} \lim \frac{\oint \underline{V}\ d\underline{r}}{s}$



Derékszögű koordináta rendszerben : $\quad \text{rot}\,\underline{V} = \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right]\underline{i} + \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right]\underline{j} + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right]\underline{k}$

Laplace operátor $\quad \Delta U = \nabla^2 U \qquad$ (derékszögű: $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$)

vektorra is alkalmazható: $\quad \Delta\,\underline{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix}$

IV. Egyszerű átalakítások

$\text{rot}\,(\text{grad}\,U) = 0 \qquad (\nabla \times \nabla U) = 0$

$\text{div}\,(\text{rot}\,(\underline{V})) = 0 \qquad (\nabla \cdot (\nabla \times \underline{V}) = 0)$

$\text{div}\,(\text{grad}\,(U)) = \Delta U \qquad (\nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U)$

$\text{rot}(\text{rot}\,(\underline{V})) = \nabla \times \nabla \times \underline{V} = \nabla(\nabla \cdot \underline{V}) - \Delta \underline{V}$

Integrál tételek:

$\oint\!\!\oint_{\Gamma} \underline{V} d\underline{s} = \iiint_{V} \text{div}\,\underline{V}\,dV \qquad$ Gauss-Osztrogradszkij

$\oint_{\hat{\Gamma}} \underline{V} d\underline{r} = \iint_{\Gamma} \text{rot}\,\underline{V} d\underline{s} \qquad$ Stokes