

Elektrosztatikai probléma megoldása végeselem módszerrel (FEM)

Probléma kezelése

- Analitikusan

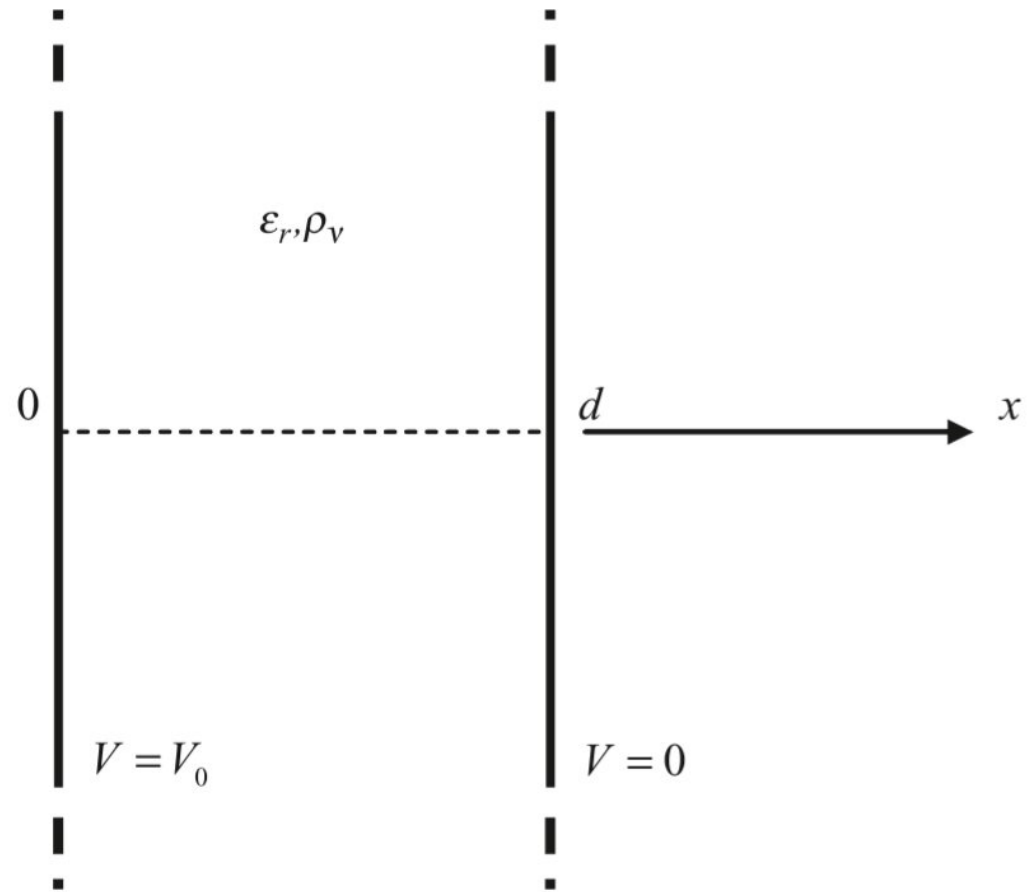
- Eredmény: minden térbeli és időbeli pontban megoldás → függvény
- Probléma: bonyolult esetben nehéz feladat → nem jól programozható

- Numerikusan (FEM)

- Eredmény: véges sok térbeli és időbeli pontban jó megoldás → vektor
→ interpoláció a többi ponthoz
- Probléma: nem egzakt, csak közelítő megoldás → cserébe megoldás
bonyolult esetben is

Megoldandó probléma

- Elektrosztatika
 - Maxwell egyenletek
 - Idő függetlenség
- Konstans töltéssűrűség
- Konstans dielektromos állandó



Analitikus megoldás

Differenciál egyenlet, általános megoldás

$$\nabla(\varepsilon_r \nabla V) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \longrightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \longrightarrow V(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} x^2 + c_1 x + c_0$$

Kezdeti feltételek

$$V(0) = V_0$$

$$V(d) = 0$$

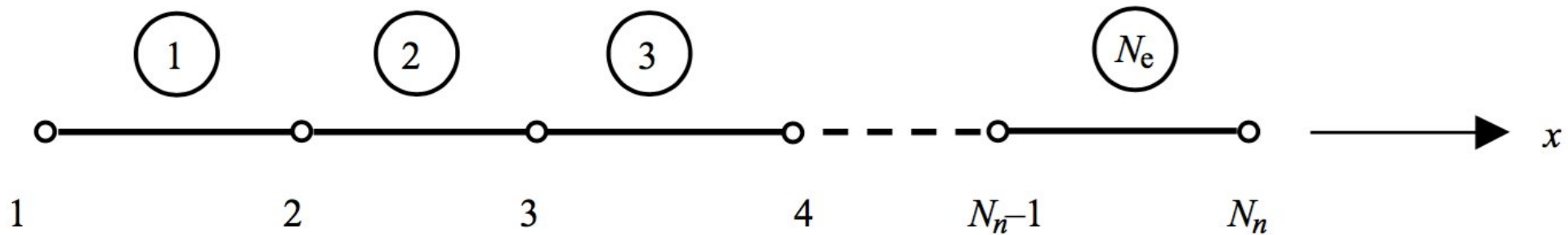
Végső megoldás, kezdeti feltétel illesztés után

$$V(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} x^2 - \left(\frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{V_0}{d} \right) x + V_0$$

Numerikus megoldás (FEM)

1. Tartomány diszkretizálása → hálózás, azaz egy „véges elem” alakja
2. Interpolációs fv. választása → pl.: polinom (első -, másodfokú)
3. Gyenge alak egy elemre → Fizikai tartalom
4. Az egyes elemek illesztése → Globális mátrixos alak
5. Perem feltételek illesztése → Fizikai tartalom
6. Megoldani a kapott egyenlet rendszert → Eredmény vektor kiszámolása

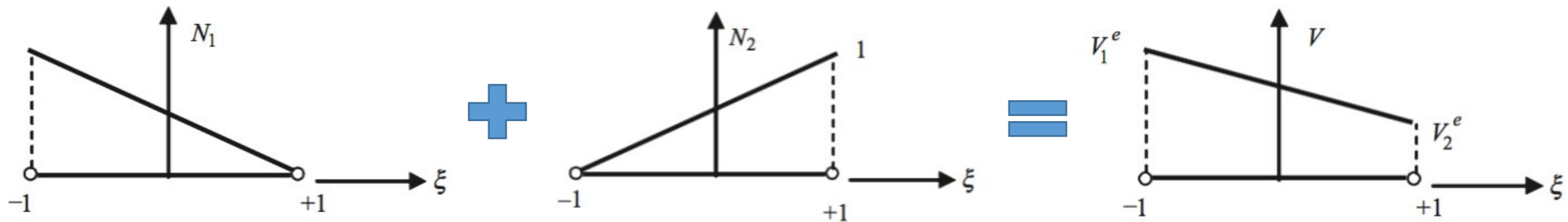
1. Tartomány diszkretizálása



Használt indexek:

- $e \rightarrow$ element, azaz egy véges elem
- $n \rightarrow$ node, azaz egy véges elemet határoló pont

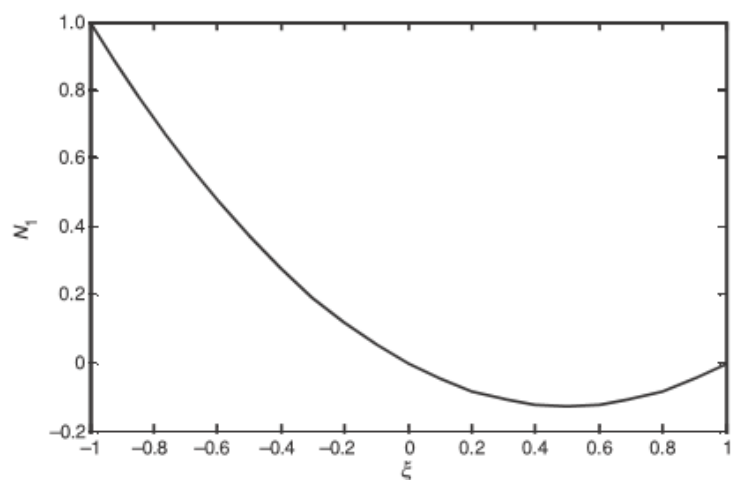
2. Interpolációs függvény



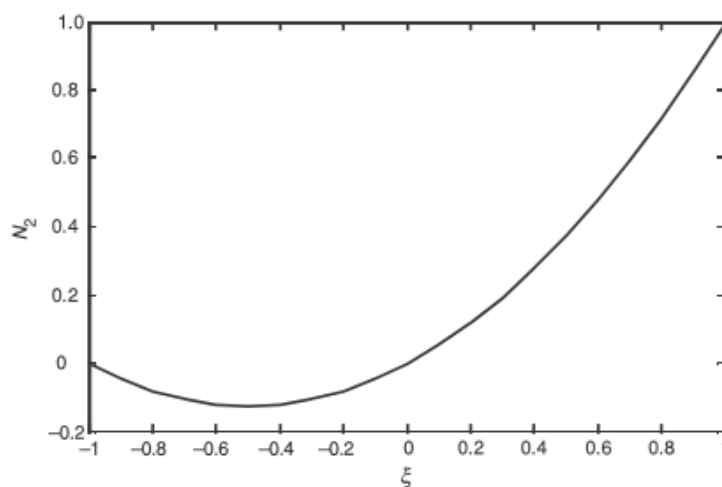
$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad + \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2} \quad = \quad V(\xi) = V_1^e N_1(\xi) + V_2^e N_2(\xi)$$

Feltétel: Határoló pontokban vissza kell kapni a majd számolt pontos értékeket.

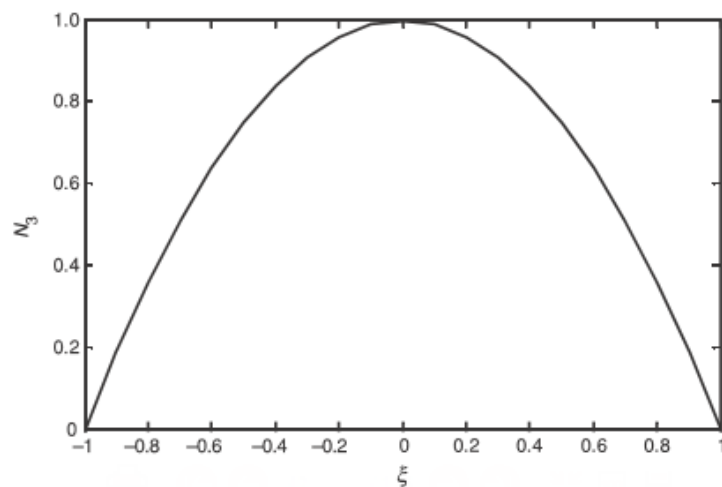
-od fokú Lagrange interpolációs polinomok



(a)

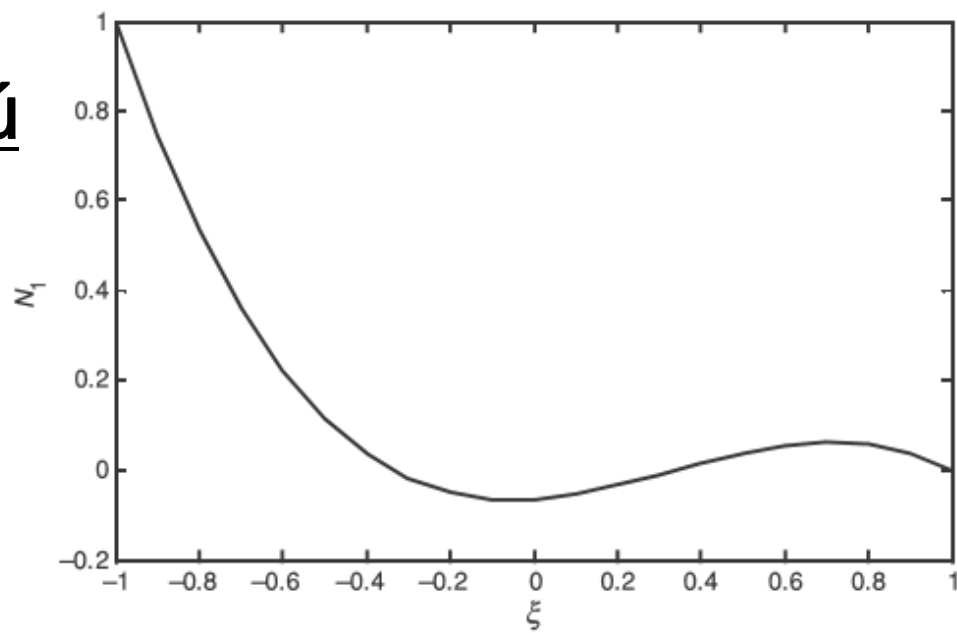


(b)

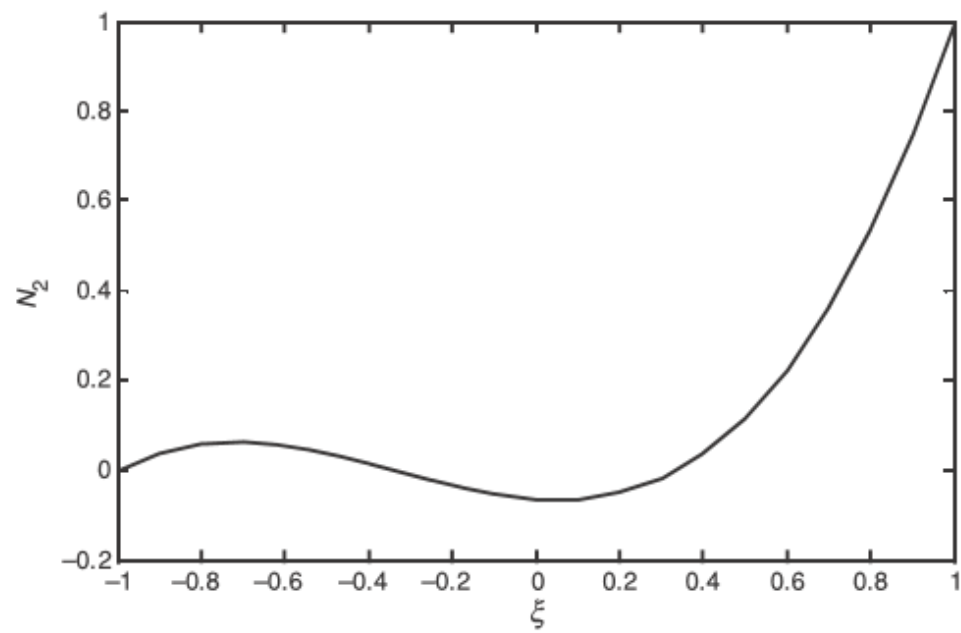


(c)

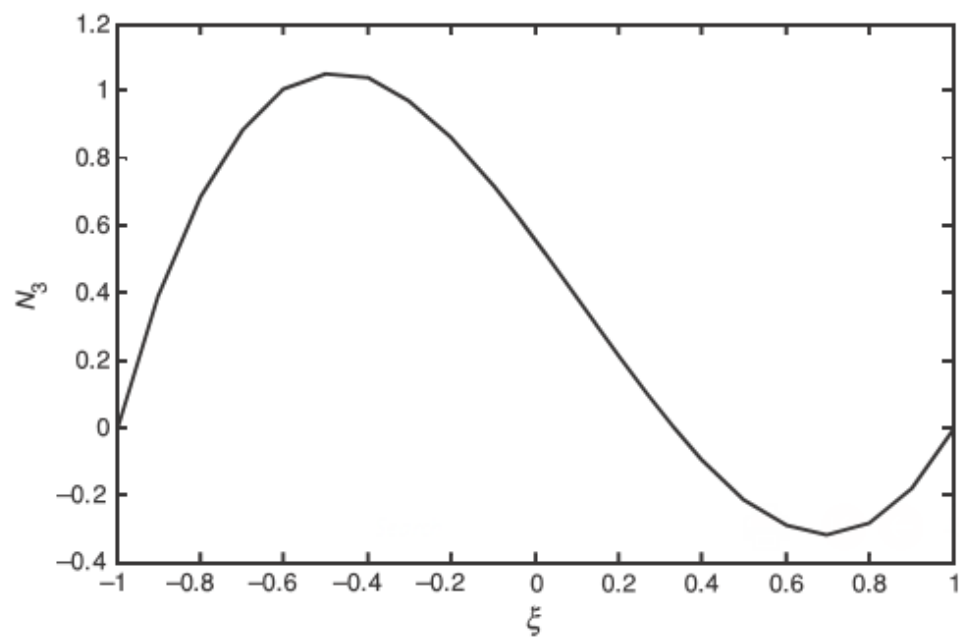
fokú



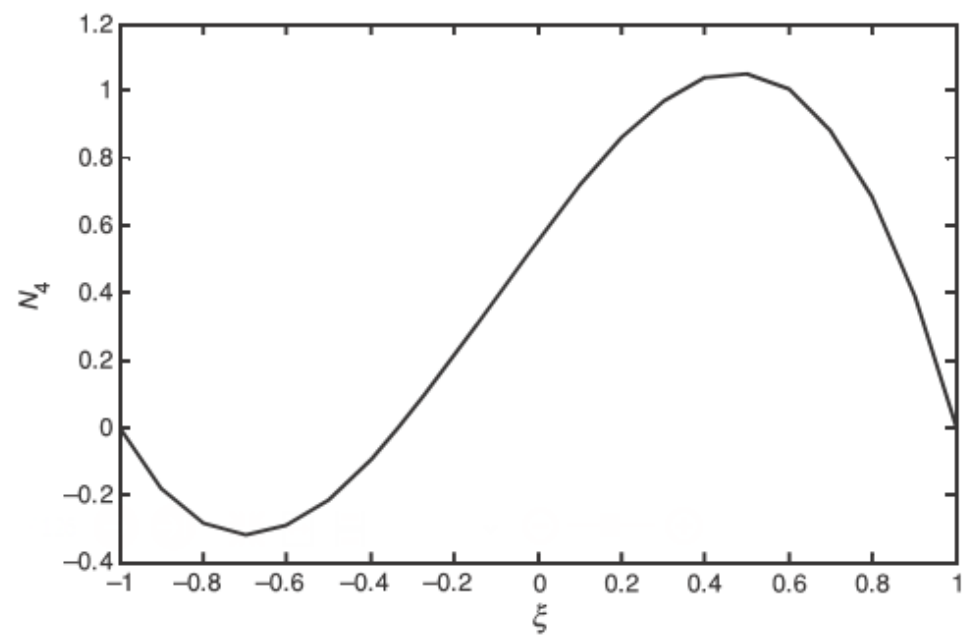
(a)



(b)



(c)



(d)

3. Gyenge alak előállítása egy elemre

Gyenge alak

tesztfüggvény

$$\nabla(\varepsilon_r \nabla V) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \int_{x_1^e}^{x_2^e} w \left[\frac{d}{dx} \left(\varepsilon^e \frac{dV}{dx} \right) + \rho_v \right] dx = 0$$

$$\longrightarrow \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{dw}{dx} \right) \varepsilon^e \left(\frac{dV}{dx} \right) dx - \int_{x_1^e}^{x_2^e} w \rho_v dx - w \varepsilon^e \frac{dV}{dx} \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} = 0$$

Itt most nincsenek Neumann
feltételek, ezért ezt a tagot most
elhagyjuk.



How to Derive a Weak Equation from a Classic Equation in higher dimensions

Classic equation: $\nabla \cdot (-c \nabla u) = f$ STRONG FORM

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-c \nabla u) v = \int_{\Omega} f v$$

Green's formula (also known as integration by parts)

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-c \nabla u) v = \int_{\Omega} c \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial \Omega} -c \nabla u \cdot n v$$

with $\partial \Omega$ being the boundary of the domain, Ω , and n the normal vector oriented away from the domain.

The weak equation reads (WEAK FORM):

$$\int_{\Omega} c \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f v + \int_{\partial \Omega} -c \nabla u \cdot n v = 0$$

Natural boundary condition (heat flux over the boundary)

3. Gyenge alak előállítása egy elemre

$$V(\xi) = V_1^e N_1(\xi) + V_2^e N_2(\xi) \quad \longleftrightarrow \quad V = \sum_{j=1}^n v_j^e N_j(x)$$

V fenti alakját beírva a gyenge alakba, majd a w súlyfüggvénynek választjuk egyszer az $N_1(\xi)$ és az $N_2(\xi) \rightarrow$ Galerkin módszer

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{dN_1}{dx} \right) \varepsilon^e \left(\sum_{j=1}^2 v_j^e \frac{dN_j}{dx} \right) dx &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_1 \rho_v dx \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{dN_2}{dx} \right) \varepsilon^e \left(\sum_{j=1}^2 v_j^e \frac{dN_j}{dx} \right) dx &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_2 \rho_v dx \end{aligned} \right\}$$

- 2 egyenlet
- 2 ismeretlen

3. Gyenge alak előállítása egy elemre

Mátrixos formalizmus

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(\frac{dN_i}{dx} \right) \varepsilon^e \left(\frac{dN_j}{dx} \right) dx \quad f_i^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} N_i \rho_v dx$$

A már említett változó cserét használhatjuk a fenti egyenletekre

3. Gyenge alak előállítása egy elemre

Szükséges változó cserék az integrálokban és deriváltakban.

$$d\xi = \frac{2}{x_2^e - x_1^e} dx = \frac{2}{l^e} dx \qquad \frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l^e} \frac{dN_i}{d\xi}$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{dN_2}{d\xi} = +\frac{1}{2}$$

3. Gyenge alak előállítása egy elemre

$$K_{ij}^e = \frac{2\varepsilon^e}{l^e} \int_{-1}^{+1} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi \quad f_i^e = -\frac{l^e \rho_0}{2} \int_{-1}^{+1} N_i(\xi) d\xi$$

$$\frac{\varepsilon^e}{l^e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} = -\frac{l^e \rho_0}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

4. Elemek illesztése

- Az előbb kapott eredmény formálisan felhasználva a többi elemre
- Kétszer annyi egyenlet, mint ahány elem.

$$e = (1): \quad K_{11}^{(1)} v_1^{(1)} + K_{12}^{(1)} v_2^{(1)} = f_1^{(1)}$$

$$K_{21}^{(1)} v_1^{(1)} + K_{22}^{(1)} v_2^{(1)} = f_2^{(1)}$$

$$e = (2): \quad K_{11}^{(2)} v_1^{(2)} + K_{12}^{(2)} v_2^{(2)} = f_1^{(2)}$$

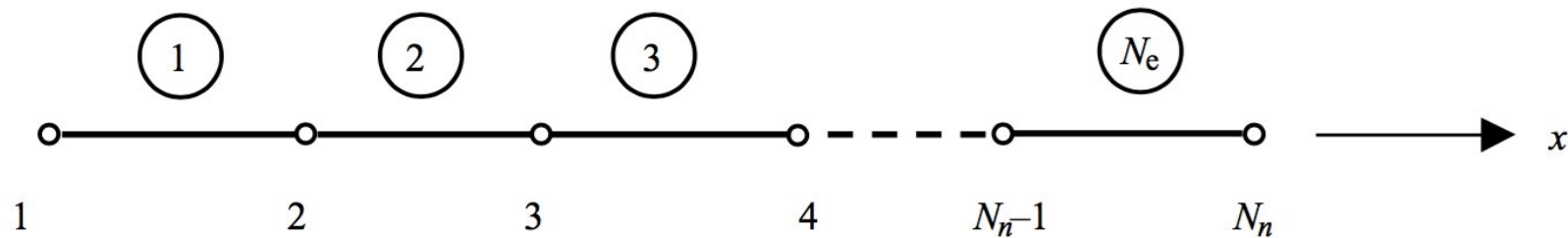
$$K_{21}^{(2)} v_1^{(2)} + K_{22}^{(2)} v_2^{(2)} = f_2^{(2)}$$

$$e = (3): \quad K_{11}^{(3)} v_1^{(3)} + K_{12}^{(3)} v_2^{(3)} = f_1^{(3)}$$

$$K_{21}^{(3)} v_1^{(3)} + K_{22}^{(3)} v_2^{(3)} = f_2^{(3)}$$

4. Elemek illesztése

Feltétel: Az elemek közös határán meg kell, hogy egyezzen a potenciál.



$$v_2^{(1)} = v_1^{(2)} = V_2$$

$$v_2^{(2)} = v_1^{(3)} = V_3$$

$$v_2^{(3)} = v_1^{(4)} = V_4$$

4. Elemek illesztése

- Cél: annyi egyenlet legyen, ahány határoló pont
- Ok: Ekkor bevezethető egy globális mátrixos formalizmus

$$e = (1): \quad K_{11}^{(1)} V_1 + K_{12}^{(1)} V_2 = f_1^{(1)}$$

$$K_{21}^{(1)} V_1 + K_{22}^{(1)} V_2 = f_2^{(1)}$$

$$e = (2): \quad K_{11}^{(2)} V_2 + K_{12}^{(2)} V_3 = f_1^{(2)}$$

$$K_{21}^{(2)} V_2 + K_{22}^{(2)} V_3 = f_2^{(2)}$$

$$e = (3): \quad K_{11}^{(3)} V_3 + K_{12}^{(3)} V_4 = f_1^{(3)}$$

$$K_{21}^{(3)} V_3 + K_{22}^{(3)} V_4 = f_2^{(3)}$$

4. Elemek illesztése

Megoldás: Adjuk össze páronként az egyenleteket az alábbi séma szerint.

$$K_{11}^{(1)} V_1 + K_{12}^{(1)} V_2 = f_1^{(1)}$$

$$K_{21}^{(1)} V_1 + \left(K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} \right) V_2 + K_{12}^{(2)} V_3 = \left(f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \right)$$

$$K_{21}^{(2)} V_2 + \left(K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} \right) V_3 + K_{12}^{(3)} V_4 = \left(f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \right)$$

4. Elemek illesztése

Globális mátrixos formalizmus

Továbbiakban b
vektor



$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & \\ K_{21}^{(1)} & (K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}) & K_{12}^{(2)} & & \\ & K_{21}^{(2)} & (K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)}) & K_{12}^{(3)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & K_{21}^{(N_e-1)} & (K_{22}^{(N_e-1)} + K_{11}^{(N_e)}) & K_{12}^{(N_e)} \\ & & & K_{21}^{(N_e)} & K_{22}^{(N_e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N_e} \\ V_{N_e+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(N_e-1)} + f_1^{(N_e)} \\ f_2^{(N_e)} \end{Bmatrix}$$

4. Elemek illesztése

$$K = \frac{\varepsilon^{(1)}}{l^{(1)}} \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon^{(2)}}{l^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon^{(3)}}{l^{(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^{(1)}}{l^{(1)}} & -\frac{\varepsilon^{(1)}}{l^{(1)}} & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon^{(1)}}{l^{(1)}} & \left(\frac{\varepsilon^{(1)}}{l^{(1)}} + \frac{\varepsilon^{(2)}}{l^{(2)}} \right) & -\frac{\varepsilon^{(2)}}{l^{(2)}} & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon^{(2)}}{l^{(2)}} & \left(\frac{\varepsilon^{(2)}}{l^{(2)}} + \frac{\varepsilon^{(3)}}{l^{(3)}} \right) & -\frac{\varepsilon^{(3)}}{l^{(3)}} \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon^{(3)}}{l^{(3)}} & \frac{\varepsilon^{(3)}}{l^{(3)}} \end{bmatrix}$$

5. Peremfeltételek illesztése

Az egyik ismeretlen
változót
helyettesítjük egy
ismert értékkel



Egy egyenlet
„feleslegessé válik”,
elhagyjuk

$$K_{11}V_1 + K_{12}V_2 + K_{13}V_3 + \cdots + K_{1N}V_N = b_1$$

$$K_{21}V_1 + K_{22}V_2 + K_{23}V_3 + \cdots + K_{2N}V_N = b_2$$

$$K_{31}V_1 + K_{32}V_2 + K_{33}V_3 + \cdots + K_{3N}V_N = b_3$$

Illesztendő peremfeltétel: $V_1 = V_0$

$$K_{21}V_0 + K_{22}V_2 + K_{23}V_3 + \cdots + K_{2N}V_N = b_2$$

$$K_{31}V_0 + K_{32}V_2 + K_{33}V_3 + \cdots + K_{3N}V_N = b_3$$

5. Peremfeltételek illesztése

Az egyik peremfeltétel illesztése után a globális mátrixos forma.

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_2 - K_{21}V_0 \\ b_3 - K_{31}V_0 \\ \vdots \\ b_N - K_{N1}V_0 \end{Bmatrix}$$

Postprocessing

