1. Határérték

1. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+7-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{24}$$

2. Határozzuk meg az alábbi határértéket egy másik módszerrel, $y = x-2$ helyettesítéssel!

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{-x^3-x^2+5x+2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2+3y}{-y^3-7y^2-11y}$$

Mivel y nullához tart ezért y magasabb hatványai sokkal kisebbek, mint y maga, ezért y mellett azok elhanyagolhatóak!

$$\lim_{y\to 0}\frac{y^2+3y}{-y^3-7y^2-11y} = \lim_{y\to 0}\frac{3y}{-11y} + \mathcal{O}(y) = -\frac{3}{11}$$

Hívjuk fel a figyelmet a nagyságrendekre, hogy ha nullához tartunk, akkor a legkisebb kitevőjű hatvány dominál!

3. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+x}{x^2-6x} \simeq \lim_{x\to 0}\frac{x}{-6x} = -\frac{1}{6}$$

4. Határozzuk meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2-1}\right)\frac{x^2+\sqrt{x^4-x^2-1}}{x^2+\sqrt{x^4-x^2-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-(x^4-x^2-1)}{x^2+\sqrt{x^4-x^2-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+\sqrt{x^4-x^2-1}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2} + \mathcal{O}(x^{3/2}) = \frac{1}{2}$$

5. Határozzuk meg az alábbi határértéket! Hasonlóan...

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-x+x^2}}{6+4x} = \frac{1}{4}$$

2. Deriválás

1. Deriválás definícióját használva határozzuk meg a $\sqrt{x}$ deriváltját!

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

2. Hiperbolikus függvények: Definiáljuk az alábbi függvényeket (nem ismertek a diákok számára)!

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Mutassuk meg, hogy

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$$
$$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$$

3. Mutassuk meg a négyzetkülönbségekre vonatkozó szabályt!

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

4. A hiperbolikus függvények definícióját használva is számoljuk ki a deriváltakat! Az exponenciális függvény deriváltja ismert.

3. Deriválás 2

Tavalyi gyakorlat anyag deriválásra. Annak megfelelően, hogy a csoportnak mit lenne fontos gyakorolni, ha az 1., 2., rész ment, akkor csak a 3. részt csinálják meg.

1. A definíció alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltját az x_0 pontban!

   a) $f(x) = 2x + 3,\ x_0 = 5$

   b) $f(x) = \sqrt{2x+5},\ x_0 = 2$

   c) $f(x) = \frac{1}{3x+4},\ x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}, \ x_0 = 4$

e) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \ x_0 = 2$

f) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}\sin(x-2), \ x_0 = 2$

2. A definíció alapján határozzuk meg a következő függvények deriváltját egy általános pontban!

a) x

b) x^2

c) x^n

d) $\frac{1}{x}$

e) $\sin(x)$

f) e^x

Bizonyítás nélkül használhatjuk az alábbi két összefüggést:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3. A deriválási szabályok segtségével határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

a) e^{3x+2}

b) $\sin(x^2 + 3x + 4)$

c) $(x^2+1)\sqrt{1+2x^3}$

d) $\cos(\sqrt{2x^2+5})$

e) $\ln(2x^2+3)$

f) $\mathrm{tg}(x)$

g) x^x

h) $(3x^2+3)^{\sin(5x+2)}$